

SUPPLEMENTO
AL VOLUME VIII, SERIE IX, DEL
NUOVO CIMENTO
A CURA DELLA SOCIETÀ ITALIANA DI FISICA

1951

N. 2

**Il problema delle correzioni radiative alla sezione d'urto
per scattering di un elettrone in un campo coulombiano
e il metodo di Bloch-Nordsieck. ⁽¹⁾**

G. MORPURGO

Istituto di Fisica dell'Università, Centro di Studio per la Fisica Nucleare del C.N.R. - Roma

(ricevuto il 23 Aprile 1951)

PARTE I.

CALCOLO CON LA TEORIA DELLE PERTURBAZIONI

Introduzione.

Il problema dello scattering di un elettrone da parte di un potenziale elettrostatico può essere, come è ben noto, risolto abbastanza facilmente, se non si tiene conto dell'interazione dell'elettrone col campo elettromagnetico generato dall'elettrone stesso; i calcoli sono più o meno complicati a seconda delle approssimazioni che si fanno, ma in ogni caso le formule che si ottengono sono inambigue ed in accordo con l'esperienza; ad esempio nel caso in cui il potenziale elettrostatico sia un potenziale coulombiano dovuto ad una carica Ze fissa, si giunge, facendo i calcoli nell'approssimazione di Born ed in approssimazione non relativistica, alla formula di Rutherford (1) per la sezione

⁽¹⁾ La presente rassegna contiene sostanzialmente quanto è stato esposto dall'Autore in una serie di quattro seminari tenuti all'Istituto di Fisica dell'Università di Torino nella seconda quindicina del Maggio 1950. Ringrazio vivamente il prof. G. WATAGHIN ed i suoi collaboratori, in particolare gli amici M. CINI ed L. A. RADICATI, per l'ospitalità veramente cordiale.

d'urto per scattering nell'elemento di angolo solido $d\Omega$:

$$(1) \quad d\sigma_0 = \left(\frac{Ze^2}{2mv_0^2} \right)^2 \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}} d\Omega \equiv \frac{4Z^2e^4m^2 d\Omega}{|\mathbf{p}_0 - \mathbf{p}|^4}.$$

Nella (1) m è la massa dell'elettrone, e la sua carica, $v_0 \equiv p_0/m$ la sua velocità iniziale (e finale), θ l'angolo tra la direzione della velocità finale e quella della velocità iniziale, \mathbf{p} (impulso finale dell'elettrone) un vettore di modulo eguale a \mathbf{p}_0 (impulso iniziale dell'elettrone), diretto nella direzione caratterizzata da $d\Omega$.

Abbiamo scritto la (1) in due forme diverse per la notazione come si incontrano spesso nella letteratura.

Con formule alquanto più complicate e calcoli alquanto più complicati si ha a che fare nel caso relativistico (la (1) va in tal caso, sempre nell'approssimazione di Born, sostituita ad esempio con la formula seguente — formula di Rutherford relativistica (Appendice I) (*) —

$$(2) \quad d\sigma_0^{(R)} = \left(\frac{Ze^2}{2mv_0^2} \right)^2 \left(1 - \beta_0^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) (1 - \beta_0^2) \frac{d\Omega}{\sin^4 \frac{\theta}{2}},$$

dove $\beta_0 = v_0/c$.

Ma in ogni caso, come abbiamo detto, si giunge a risultati perfettamente coerenti.

Ciò sembra non essere più vero quando si voglia tener conto nel calcolo dell'effetto del campo elettromagnetico associato all'elettrone nel suo moto; quando si voglia cioè tener conto del fatto che l'elettrone nel suo moto (accelerato a causa della presenza del potenziale elettrostatico) irraggia, e che la radiazione reagisce sul moto dell'elettrone ⁽²⁾. Il sistema dinamico con cui si ha in questa impostazione più precisa del problema, a che fare, è un sistema ad infiniti gradi di libertà [1]: le coordinate dell'elettrone e le coordinate degli infiniti oscillatori di radiazione; e se si calcola l'evolversi di tale sistema dinamico secondo le leggi della meccanica quantistica (e più precisamente, della elettrodinamica quantistica) si incontrano, come vedremo, delle difficoltà che hanno costituito per vario tempo « un punto nero » per l'elettrodinamica quantistica e che si può dire sono state chiarite soltanto ultimamente con i metodi di rinormalizzazione di BETHE [2], SCHWINGER [3], TOMONAGA [4].

È appunto perchè il problema che stiamo trattando mostra chiaramente il significato di tali metodi di rinormalizzazione, che abbiamo deciso di com-

(*) Nel seguito i rinvii all'appendice saranno indicati con: (A₁), (A₂) etc.

(²) Questo modo di dire, derivato dall'impostazione classica del problema, non è del tutto proprio dal punto di vista dell'elettrodinamica quantistica.

piere questa rassegna, rassegna in cui saranno considerati principalmente i lavori di BLOCH e NORDSIECK [5], PAULI e FIERZ [6], WEINMANN e BRAUNBECK [7], DANCOFF [8], LEWIS [9], EPSTEIN [10], Koba e collaboratori [11], ecc.; alcuni lavori collaterali, quali quelli di BETHE e OPPENHEIMER [12], WELTON [13], saranno pure tenuti presenti. L'ordine che seguiremo non sarà l'ordine storico bensì quello logico alla luce delle conoscenze attuali; la trattazione sarà tuttavia tale da far risultare quello che è stato l'ordine storico.

Introdurremo di volta in volta le notazioni necessarie; tuttavia è conveniente riportare qui una volta per tutte quelle maggiormente usate con l'avvertenza che, nel seguito, ove una notazione non sia espressamente chiarita ci si riferisce senz'altro alle (3).

$$(3) \left\{ \begin{array}{ll} m & = \text{massa dell'elettrone,} \\ e & = \text{carica dell'elettrone,} \\ \hbar & = \text{costante di Planck divisa per } 2\pi, \\ k & = \text{vettore di propagazione di un fotone } (\hbar k = \text{impulso del fotone;} \\ & \quad \hbar c |k| = \text{energia del fotone}), \\ p_0 & = \text{impulso di un elettrone prima dello scattering,} \\ p & = \text{impulso dell'elettrone dopo lo scattering se tale scattering è} \\ & \quad \text{elastico,} \\ p_k, p_s & = \text{impulso dell'elettrone dopo lo scattering se tale scattering è} \\ & \quad \text{anelastico;} \\ \\ \frac{p_k^2}{2m} + \hbar c |k| & = \frac{p_0^2}{2m}; \quad \frac{p_s^2}{2m} + \varepsilon = \frac{p_0^2}{2m}; \\ \\ p_0, p & = p_0, p_k, p_s = \text{moduli dei sopradetti impulsi,} \\ E_P & = \text{energia di un elettrone di impulso } P \text{ generico,} \\ \alpha, \beta & = \text{matrici di Dirac,} \end{array} \right.$$

(il simbolo p verrà usato nella scrittura di hamiltoniane come operatore con significato naturalmente ben diverso da quello suesposto. Non vi è chiaramente pericolo di confusione).

1. - Impostazione generale.

Il problema che dunque ci si pone è il seguente: qual'è la sezione d'urto per scattering, da parte di un potenziale coulombiano, di un elettrone nell'elemento di angolo solido $d\Omega$ quando si tenga conto dell'accoppiamento tra l'elettrone ed il campo elettromagnetico; o se si vuole: che modificazioni sono da apportarsi alla (1) (nel caso non relativistico) o alla (2) (nel caso relativistico) per effetto del sopradetto accoppiamento; o ancora, con locuzione abbreviata: quali sono le « correzioni radiative » alla formula (1) o (2)?

Un problema siffatto si tratta naturalmente tanto in una impostazione classica quanto in una quantistica a partire dall'hamiltoniano complessivo del sistema elettrone più campo elettromagnetico, hamiltoniano che in approssimazione completamente non relativistica si scrive notoriamente nella forma ⁽³⁾:

$$(4) \quad H = \frac{1}{2m} \left(\mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A}_{\text{tr}} \right)^2 + \frac{1}{2} \sum_{k,r} \{ e^2 p_k^{(r)} p_{-k}^{(r)} + k^2 q_k^{(r)} q_{-k}^{(r)} \} + V(\mathbf{x}) \quad (r = 1, 2).$$

Nelle (4), (4*) $\mathbf{x} \equiv (x_1, x_2, x_3)$ sono le coordinate dell'elettrone, $\mathbf{p} \equiv (p_1, p_2, p_3)$ gli impulsi ad esse coniugati, $q_k^{(r)}$ e $p_k^{(r)}$ le coordinate e i momenti coniugati degli oscillatori di radiazione relativi alla direzione di polarizzazione caratterizzata dal versore $e_k^{(r)}$, $V(\mathbf{x})$ l'energia potenziale, che specializzeremo nel seguito al caso coulombiano, del campo esterno agente sull'elettrone. Inoltre:

$$(4*) \quad \mathbf{A}_{\text{tr}} = \frac{1}{V^{1/2}} \sum_{k,r} \mathbf{e}_k^{(r)} q_k^{(r)} \exp[i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}];$$

V essendo il volume di periodicità che sarà fatto tendere all'infinito. Nello scrivere la (4) si è infine supposta già eseguita la trasformazione canonica che elimina le coordinate associate alle onde longitudinali del campo elettromagnetico e la conseguente sottrazione della self-energia longitudinale statica ($\lim_{r \rightarrow 0} e^2/r$) dell'elettrone.

Fino al n. 6 il problema posto all'inizio di questo numero sarà considerato caratterizzato dall'hamiltoniano (4) cioè sarà trattato in approssimazione completamente non relativistica.

In una trattazione classica (cioè secondo la meccanica e l'elettromagnetismo classici) del nostro problema si tratterebbe allora di scrivere le equazioni del moto:

$$(5) \quad \begin{cases} \dot{\mathbf{p}} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}, & \dot{\mathbf{x}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}, \\ \dot{p}_k^{(r)} = -\frac{\partial H}{\partial q_k^{(r)}}, & \dot{q}_k^{(r)} = \frac{\partial H}{\partial p_k^{(r)}}, \end{cases}$$

e di vedere quale risulta essere secondo tali equazioni la traiettoria di un elettrone di determinata posizione e velocità iniziali (parametro d'urto q ed impulso iniziale \mathbf{p}_0) quando non vi sia inizialmente energia raggiante presente e l'elettrone si trovi inizialmente all'infinito. Si potrebbe, dalla conoscenza di tale traiettoria risalire facilmente alla sezione d'urto per scattering in $d\Omega$, procedendo come si fa per ricavare la (1) (quando si esegue il calcolo classicamente); una siffatta trattazione classica non ci risulta sia mai stata svolta *dettagliatamente*; sebbene didatticamente assai istruttiva, l'interesse che essa

⁽³⁾ Per una più precisa definizione delle notazioni usate vedasi WENTZEL [1]. Nella (4) si è fatto uso di unità di Heaviside.

presenterebbe sarebbe del resto un po' ristretto come diremo più oltre (n. 7).

Secondo la meccanica e la elettrodinamica quantistica \mathbf{x} , \mathbf{p} , $q_k^{(r)}$, $p_k^{(r)}$ in (4), vanno invece nello spirito del principio di corrispondenza, interpretati come operatori soddisfacenti a ben note regole di commutazione; ed allo studio delle equazioni del moto (5) (o, per essere più precisi, della corrispondente equazione di Hamilton-Jacobi) si sostituisce la considerazione della equazione di Schrödinger associata all'hamiltoniana H cioè la (4):

$$(6) \quad \left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta_x + V(\mathbf{x}) + \frac{ie}{mc} \frac{\hbar}{V^{1/2}} \sum_k (\mathbf{e}_k \cdot \text{grad}) q_k \exp [i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}] + \right. \\ \left. + \frac{e^2}{2mc^2 V} \sum_k \sum_{k'} (\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_{k'}) \cdot q_k q_{k'} \exp [i(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \cdot \mathbf{x}] + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \sum_k \left[-\hbar^2 c^2 \frac{\partial^2}{\partial q_k \partial q_{-k}} + k^2 q_k q_{-k} \right] \right\} \psi(q_k, \mathbf{x}, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(q_k, \mathbf{x}, t),$$

o anche (5):

$$(7) \quad \left\{ -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta_x + V(\mathbf{x}) + \frac{ie}{mc} \frac{\hbar}{V^{1/2}} \sqrt{\frac{\hbar c}{2}} \sum_k \frac{(\mathbf{e}_k \cdot \text{grad})}{|k|} (a_k + a_{-k}^*) \exp [i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}] + \right. \\ \left. + \frac{e^2}{2mc^2 V} \frac{1}{2} \sum_k \sum_{k'} \frac{(\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_{k'})}{\sqrt{|k| \cdot |k'|}} (a_k + a_{-k}^*)(a_{k'} + a_{-k'}^*) \exp [i(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \cdot \mathbf{x}] + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \sum_k \hbar c |k| (a_k^* a_k + a_k a_k^*) \right\} \psi(N_k, \mathbf{x}, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(N_k, \mathbf{x}, t).$$

La trattazione sin qui svolta è del tutto generale; ed a partire dall'equazione di Schrödinger (6) o (7) si può trattare un qualsiasi problema di interazione tra elettrone e campo elettromagnetico in un campo esterno $V(\mathbf{x})$.

In mancanza di meglio tali problemi si trattano notoriamente di solito con

(4) Nel seguito sottointenderemo sempre l'indice di polarizzazione.

(5) L'equazione (7) differisce dalla (6) semplicemente per il fatto che si è cambiata in essa rappresentazione per il campo elettromagnetico. Precisamente nella (7) la rappresentazione usata è quella in cui gli autovettori degli operatori $a_k^* a_k$ sono diagonali, gli operatori a_k , a_k^* (i cosiddetti operatori di creazione ed annichilamento) essendo collegati ai q_k , p_k dalle relazioni:

$$q_k = \sqrt{\frac{\hbar c}{2|k|}} (a_k^* + a_k), \quad p_k = \sqrt{\frac{\hbar |k|}{2c}} i(a_k^* - a_{-k}).$$

Useremo nel seguito indifferentemente la forma (6) o (7) della equazione di Schrödinger. Inoltre nel seguito faremo in generale uso di unità usuali e non di unità di Heaviside. Si noti che nelle unità di Heaviside il potenziale coulombiano va scritto $(1/4\pi)(Ze^2/r)$.

la teoria delle perturbazioni considerando:

$$(8_1) \quad H'_1 = \frac{ie\hbar}{mcV^{1/2}} \sum_k (e_k \cdot \text{grad}) q_k \exp [i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}] ;$$

$$(8_2) \quad H'_2 = \frac{e^2}{2mc^2} \frac{1}{V} \sum_k \sum_{k'} (e_k \cdot e_{k'}) q_k q_{k'} \exp [i(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \cdot \mathbf{x}] ,$$

come termini perturbativi nella (6). Notiamo per inciso come a metodi perturbativi (di Poincaré o simili) corrispondenzialmente analoghi ⁽⁶⁾ a quelli quantistici si sarebbe di necessità condotti anche in una trattazione classica del problema a partire dalle (5) (o dalla corrispondente equazione di Hamilton-Jacobi). L'utilità didattica della trattazione classica cui prima accennavamo, proviene appunto da questo fatto; il significato del principio di corrispondenza per l'elettrodinamica appare da essa molto chiaro.

In particolare la formula della teoria delle perturbazioni:

$$(9) \quad P_{ab} = \frac{2\pi}{\hbar} |H'_{ba}|^2 \varrho_E ,$$

con significato ben noto dei simboli, ci permette di calcolare la probabilità di transizione per unità di tempo di un sistema da uno stato a ad un altro b sotto forma di sviluppo in serie di potenze della costante di accoppiamento e che compare nella perturbazione $H' = H'_1 + H'_2$ (la perturbazione H'_2 non comparirà, come ci si potrà rendere facilmente conto, nel seguito della nostra trattazione; perciò ne possiamo prescindere sin d'ora).

La nomenclatura che useremo a questo proposito nella seguente trattazione sarà per comodità leggermente diversa da quella convenzionale; e precisamente: saranno detti di ordine zero processi il cui elemento di matrice della perturbazione da porsi nella (9) è di ordine zero in e ; di ordine uno processi il cui elemento di matrice è del primo ordine in e ; di ordine due processi il cui elemento di matrice è del secondo ordine in e e così via; in altre parole, l'ordine di un processo, è, tenuto presente il significato e le proprietà della perturbazione H'_1 , eguale al numero complessivo delle emissioni ed assorbimenti di quanti virtuali o reali che in esso intervengono.

È allora noto come, nel caso che $V(\mathbf{x})$ sia l'energia potenziale coulombiana procedendo con la teoria delle perturbazioni testè brevemente accennata ⁽⁷⁾, a partire dall'equazione di Schrödinger (6) o (7), si ottenga, come processo di ordine zero, la formula (1) di Rutherford per lo scattering elastico. Di fatto, procedere nell'ordine zero equivale a trascurare completamente l'interazione del-

⁽⁶⁾ Vedasi ad esempio *Handbuch der Phys.*, vol. V, pag. 131

⁽⁷⁾ Si noti che nel seguito tratteremo anche $V(\mathbf{x})$ alla stregua di una perturbazione (approssimazione di Born); tuttavia l' e che compare in $V(\mathbf{x})$ non avrà nulla a che vedere con l'ordine di un processo quale definito or ora.

l'elettrone col proprio campo elettromagnetico, o, se si vuole, a poter separare le variabili nella (6) scrivendo un'equazione di Schrödinger per l'elettrone in assenza di campo:

$$(10) \quad \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta_x - \frac{Ze^2}{r} \right) \psi(\mathbf{x}, t) = i\hbar \frac{\partial \psi(\mathbf{x}, t)}{\partial t};$$

nella approssimazione di Born (e del resto anche non nell'approssimazione di Born) la (10) conduce subito alla formula di Rutherford.

Il problema che ci siamo posti all'inizio di questo numero è allora: che modificazioni vengono portate alla (1) (approssimazione zero) quando si tenga conto delle approssimazioni superiori in e ?

2. - Catastrofe infrarossa.

In questo numero vogliamo rispondere alla domanda chiarita nel numero precedente e posta in termini precisi alla fine del numero stesso; cominceremo perciò col considerare, accanto al processo di ordine zero che corrisponde alla sezione d'urto (1), processi in cui intervengono anche *elementi di matrice* del primo ordine in e . Tali elementi di matrice relativi a processi del primo ordine, dato che inizialmente non si hanno quanti presenti, corrispondono necessariamente a transizioni dell'elettrone in e accompagnate dall'emissione reale di un quanto. È perciò intuitivo e si dimostra facilmente a partire dalle formule della teoria delle perturbazioni, che, se si vuole trovare la sezione d'urto $d\sigma_0$, per scattering dell'elettrone in $d\Omega$ tenendo conto anche dei processi in cui intervengono elementi di matrice del primo ordine, basta semplicemente aggiungere alla sezione d'urto di ordine zero $d\sigma_0$ la sezione d'urto $d\sigma_1$ per deflessione dell'elettrone in $d\Omega$ accompagnata (tale deflessione) da irraggiamento di un qualsiasi quanto energeticamente possibile; ossia:

$$(11) \quad d\sigma_{01} = d\sigma_0 + d\sigma_1.$$

È questa dunque l'espressione della sezione d'urto per deflessione in $d\Omega$ quando si tenga conto dei processi del primo ordine; e, lo ripetiamo, nella (11) il primo termine $d\sigma_0$ è la sezione d'urto calcolata facendo uso dei soli elementi di matrice di approssimazione zero (cioè nel nostro caso non relativistico la sezione d'urto (1)); e il secondo termine $d\sigma_1$ è l'integrale della sezione d'urto $d\sigma_B(k)$ per scattering dell'elettrone in $d\Omega$ con contemporanea emissione di un quanto di energia compresa tra $\hbar k$ e $\hbar(k + d|k|)$, integrale esteso a tutte le energie possibili del quanto emesso.

Diamo la forma esplicita di $d\sigma_B(k)$ quale risulta dal calcolo mediante la

teoria delle perturbazioni (A_2):

$$(12) \quad d\sigma_B(k) = \frac{2}{3\pi} \frac{e^2}{\hbar c} d\Omega \frac{4Z^2 e^4 m^2}{|\mathbf{p}_0 - \mathbf{p}_k|^4} \frac{p_k}{p_0} \frac{|\mathbf{p}_0 - \mathbf{p}_k|^2}{m^2 c^2} \frac{d\hbar c |k|}{\hbar c |k|} = \\ = \frac{2}{3\pi} \frac{e^2}{\hbar c} \mathcal{R}_k \frac{p_k}{p_0} \frac{|\mathbf{p}_0 - \mathbf{p}_k|^2}{m^2 c^2} \frac{d\hbar c |k|}{\hbar c |k|}.$$

Risulta quindi:

$$(12^*) \quad d\sigma_1 = \frac{2}{3\pi} \frac{e^2}{\hbar c} \int_0^{p_0^{2/2m}} \mathcal{R}_k \frac{p_k}{p_0} \frac{|\mathbf{p}_0 - \mathbf{p}_k|^2}{m^2 c^2} \frac{d\hbar c |k|}{\hbar c |k|};$$

nelle (12), (12*), \mathbf{p}_k (impulso finale dell'elettrone) essendo un vettore diretto entro l'angolo solido $d\Omega$ e di modulo p_k tale che la conservazione dell'energia sia per ciascun $|k|$ assicurata:

$$\frac{p_k^2}{2m} + \hbar c |k| = \frac{p_0^2}{2m}.$$

Attraverso quest'ultima relazione p_k in (12) è legato a $|k|$.

Abbiamo pure introdotto la notazione \mathcal{R}_k per indicare l'espressione:

$$\frac{4Z^2 e^4 m^2}{|\mathbf{p}_0 - \mathbf{p}_k|^4} d\Omega,$$

che differisce dalla $d\sigma_0$ (1) per la sostituzione di \mathbf{p} con \mathbf{p}_k . Per uniformità di notazioni la $d\sigma_0$ (1) verrà conseguentemente talvolta indicata nel seguito anche con la notazione \mathcal{R}_0 .

Nel calcolo della (12) sono state compiute le due approssimazioni seguenti:

1) gli stati iniziale e finale dell'elettrone si suppongono al solito rappresentati da onde piane rispettivamente $\exp[(i/\hbar)\mathbf{p}_0 \cdot \mathbf{x}]$, $\exp[(i/\hbar)\mathbf{p}_k \cdot \mathbf{x}]$ invece che dalle funzioni d'onda corrette dell'elettrone nel potenziale coulombiano Ze^2/r (approssimazione di Born);

2) gli impulsi $\hbar\mathbf{k}$ dei quanti emessi vengono sistematicamente trascurati di fronte a quelli iniziale o finale dell'elettrone; in altre parole si trascurano i rinculi dell'elettrone (approssimazione di dipolo).

Si noti che il campo di validità della (12) è assai limitato in quanto da una parte essa è stata ricavata nell'approssimazione di Born che implica la condizione:

$$\frac{Ze^2}{\hbar v_0} \ll 1,$$

dall'altra essa è stata ricavata da un hamiltoniano non relativistico, il che implica:

$$\beta_0 = \frac{v_0}{c} \ll 1;$$

queste due condizioni possono essere soltanto difficilmente soddisfatte contemporaneamente; inoltre la approssimazione di dipolo implica ulteriori restrizioni; tuttavia questa limitata validità non ha alcuna importanza per quanto riguarda le considerazioni che dovremo fare.

Il punto fondamentale da rilevare (e che sussiste anche se le approssimazioni 1) e 2) non vengono compiute ed anche in una formulazione relativistica del problema, ed infine anche se il campo $V(\mathbf{x})$ non è coulombiano) è allora il seguente: per $|k|$ sufficientemente piccoli $d\sigma_B(k)$ si comporta come $d|k|/|k|$.

Questo comportamento ha come conseguenza immediata che l'integrale di $d\sigma_B(k)$ (12*) esteso a tutti i valori energeticamente possibili di $|k|$, e cioè tra 0 e $\hbar c|k| = p_0^2/2m$, diverge logaritmicamente per $|k| \leq 0$.

Questo fatto, od il fatto ad esso collegato che la sezione d'urto per scattering dell'elettrone viene conseguentemente a divergere, prende il nome di «catastrofe infrarossa». E, a quanto pare, sembra a prima vista trattarsi di una vera e propria catastrofe della elettrodinamica. Infatti la correzione $d\sigma_1$ relativa alla sezione d'urto per scattering dell'elettrone in $d\Omega$ è infinita *qualunque sia* $d\Omega$; e ciò è in evidente contrasto con l'esperienza la quale mostra che, se correzioni sono da farsi alla formula di Rutherford $d\sigma_0$ per scattering in $d\Omega$, esse sono talmente piccole da essere per il momento all'interno degli errori di misura.

3. - Correzione allo scattering elastico.

Ci si pone a questo punto la questione di vedere a che cosa è dovuto il risultato in verità assai insoddisfacente cui si è giunti nel numero precedente, e cioè che la correzione alla sezione d'urto (1) per scattering in $d\Omega$, quando si tenga conto dei processi associati ad elementi di matrice del primo ordine in e , viene ad essere infinita; BLOCH e NORDSIECK [5] furono i primi ad analizzare la questione, concludendo che la ragione del fallimento era da ricercarsi nella inadeguatezza della teoria delle perturbazioni verso le basse frequenze del quanto emesso; essi cercarono perciò un altro metodo, che non fosse la teoria delle perturbazioni, per trattare il problema cercando di risolvere *esattamente* (senza cioè ricorrere ad uno sviluppo in serie di e) l'equazione di Schrödinger (6).

Più precisamente BLOCH e NORDSIECK si resero conto che il risultato di essere la sezione d'urto per emissione di un quanto compreso tra $|k|$ e $|k| + d|k|$ infinita alle basse frequenze era dovuto all'uso incorretto della teoria delle perturbazioni. Tuttavia essi non si resero, almeno sembra, conto che la teoria delle perturbazioni stessa dava invece, come vedremo, grazie ad una eliminazione di infinità alle basse frequenze risultati corretti per quanto

riguardava la sezione d'urto per deflessione dell'elettrone in $d\Omega$ indipendentemente dall'eventuale irraggiamento di un fotone.

Discuteremo nella parte II il procedimento di Bloch e Nordsieck. Qui abbiamo voluto rilevare soltanto che mentre le linee generali del procedimento di Bloch-Nordsieck sono corrette, non del tutto corrette sono le conclusioni a cui questi Autori giunsero così come le argomentazioni che essi fecero e cui accennavamo prima circa il fallimento della teoria delle perturbazioni.

Mostreremo in questo numero e nei successivi 4, 5, 6 precisamente che, se la teoria delle perturbazioni viene svolta in maniera coerente, tenendo conto cioè di tutti i termini di cui occorre tener conto, e se si applicano certi criteri di sottrazione delle infinità fisicamente giustificati (metodi di rinormalizzazione) che esamineremo più oltre, si giunge per il nostro problema di scattering a risultati completamente ragionevoli, coincidenti, nel senso che verrà chiarito nella seconda parte, con quelli del metodo di Bloch-Nordsieck.

La quantità $d\sigma_{01}$ ricavata con la teoria delle perturbazioni nel numero precedente, la discussione della cui divergenza *ha storicamente costituito il punto di partenza del problema che stiamo trattando*, ha, se si riflette un momento, *ben poco significato*.

Indatti $d\sigma_{01}$ (11) rappresenta la sezione d'urto per scattering dell'elettrone in $d\Omega$ quando si tenga conto accanto ai processi di ordine zero, dei processi in cui intervengono elementi di matrice del primo ordine. La grandezza che fisicamente interessa non è già questa bensì è la sezione d'urto per scattering dell'elettrone in $d\Omega$, corretta fino all'ordine che ci interessa, ad esempio corretta fino all'ordine e^2 . Indichiamo tale sezione d'urto corretta fino all'ordine e^2 con $d\sigma_{0e^2}$; si potrebbe pensare che fosse $d\sigma_{0e^2} = d\sigma_{01}$ ma si vede facilmente che questo non è: ciò in quanto, per calcolare la sezione d'urto $d\sigma_{0e^2}$ corretta fino all'ordine e^2 non basta tener conto dei soli elementi di matrice del primo ordine come è stato fatto nel calcolo di $d\sigma_{01}$, ma occorre tener presenti, come apparirà ora chiaro, anche quelli del secondo ordine; una sezione d'urto è infatti proporzionale per la (9) al modulo quadrato di una espressione contenente in generale una somma di elementi di matrice di vari ordini:

$$(13) \quad | (0) + (e) + (e^2) + \dots |^2,$$

dove col simbolo (0) si sono indicati in via del tutto generale elementi di matrice di ordine zero, con (e) elementi di matrice di ordine uno, con (e^2) elementi di matrice di ordine due e così via.

Nello sviluppare il quadrato (13) tenendo conto di tutti i termini fino all'ordine e^2 , si vede allora come si presentino in effetti vari tipi di termini:

a) termini di ordine zero (0)(0)*: sono quelli che intervengono nel dar luogo alla sezione d'urto di ordine zero (1) (con (0)* si indica il complesso coniugato);

- b) termini di ordine uno: $(e)(0)^* + (e)^*(0)$; danno contributo nullo ⁽⁸⁾;
 c) termini di ordine due;

nel numero precedente abbiamo di questi termini del secondo ordine considerato soltanto quelli associati ad elementi di matrice del primo ordine e cioè il solo termine $(e)(e)^*$.

È questo il termine $(e)(e)^*$ che interviene in $d\sigma_B(k)$ come è chiaro dalla precedente trattazione. Ma se vogliamo ottenere quella che è la sezione d'urto per scattering corretta sino all'ordine e^2 , occorre evidentemente considerare anche il termine:

$$(14) \quad (0)^*(e^2) + (e^2)^*(0),$$

associato ad elementi di matrice del secondo ordine in quanto esso pure è un termine che dà un contributo del secondo ordine alla sezione d'urto.

Tener conto, così come è stato fatto nel calcolo di (11), dei soli elementi di matrice (e) significa ottenere una sezione d'urto che non è corretta fino all'ordine e^2 in quanto i termini di ordine e^2 ora detti (14) sono stati trascurati e perciò tale sezione d'urto non ha alcun significato. Ed è chiaro che sino a che non si sia tenuto conto di tutti i termini di ordine e^2 nella sezione d'urto, nulla si può dire ancora circa la forma di una eventuale divergenza della sezione d'urto stessa; per tener conto di tutti i termini, per ottenere cioè la sezione d'urto corretta basterà aggiungere a $d\sigma_{01}$ i contributi dei termini del tipo (14) sopra accennati.

Due sono i tipi di processi in cui intervengono elementi di matrice di tipo (e^2) ; il primo è un processo in cui l'elettrone p_0 emette un quanto $\hbar k$, viene quindi scatterato in p dal potenziale e riassorbe lo stesso quanto $\hbar k$; il secondo è un processo di Bremsstrahlung doppia ⁽⁹⁾, ossia in cui l'elettrone emette, l'uno dopo l'altro, due quanti $\hbar k_1$, $\hbar k_2$; quest'ultimo processo non contribuisce nel nostro caso in virtù dell'osservazione fatta precedentemente ⁽⁸⁾.

Nel calcolo effettivo dei termini di ordine e^2 , quando il potenziale $V(x)$ si tratti nell'approssimazione di Born ⁽⁷⁾, bisogna tuttavia fare attenzione in quanto non si può semplicemente applicare la formula standard della teoria delle perturbazioni:

$$H'_{ba} = \sum_{i,i'} \frac{H'_{bi} H'_{ii'} H'_{i'a}}{(E_b - E_i)(E_b - E_{i'})};$$

se si richiamano alla memoria gli sviluppi generali della teoria delle pertur-

⁽⁸⁾ La ragione per cui i prodotti misti del tipo $(e)(0)^* + (e)^*(0)$ danno contributo nullo alla sezione d'urto dipende dal fatto che i processi in cui si conserva l'energia dell'elettrone qual'è quello associato a elementi di matrice di ordine zero non interferiscono con processi in cui l'energia dell'elettrone non si conserva qual'è quello di ordine uno.

⁽⁹⁾ W. HEITLER: op. cit. in [1], pag. 181.

bazioni, si ricorderà che se si vuole, come è necessario, avere a che fare con funzioni d'onda le quali siano sempre normalizzate all'unità, è necessario aggiungere in alcuni casi, quando si facciano i conti di ordini superiori al primo i termini (i cosiddetti termini di rinormalizzazione della probabilità) che facciano in modo che questa condizione sia soddisfatta (A_3).

Tenendo presente tutto questo il contributo alla sezione d'urto $d\sigma_{0e^2}$ dovuto a termini del tipo (14) viene ad essere:

$$(15) \quad d\sigma_2 = -\frac{2}{3\pi} \frac{e^2}{\hbar c} d\Omega \frac{4Z^2 e^4 m^2}{|\mathbf{p}_0 - \mathbf{p}|^4} \frac{|\mathbf{p}_0 - \mathbf{p}|^2}{m^2 c^2} \int_0^\infty \frac{d\hbar c}{\hbar c} \frac{|k|}{|k|} = \\ = -\frac{2}{3\pi} \frac{e^2}{\hbar c} \mathcal{R}_0 \frac{|\mathbf{p}_0 - \mathbf{p}|^2}{m^2 c^2} \int_0^\infty \frac{d\hbar c}{\hbar c} \frac{|k|}{|k|},$$

avendo fatto naturalmente nel calcolo della (15) le stesse approssimazioni 1) e 2) eseguite nel calcolo della (12) (vedasi pag. 116). Mentre la correzione $d\sigma_1$ (12*) prende il nome di correzione radiativa alla (1) dovuta allo scattering anelastico, o brevemente, di correzione anelastica, alla $d\sigma_2$ (15) si dà convenientemente il nome di correzione radiativa alla (1) dovuta allo scattering elastico (correzione elastica) in quanto il processo che interviene in essa — emissione e riassorbimento di uno stesso quanto — è effettivamente tale che l'energia dell'elettrone si conserva.

L'integrazione rispetto a $|k|$ nella (15) proviene dal fatto che il quanto virtuale $|k|$ emesso e riassorbito, come abbiamo detto, dall'elettrone durante lo scattering da parte del potenziale $V(\mathbf{x})$, può avere una qualsiasi energia; la cosa può essere vista più chiaramente dai calcoli svolti in (A_3). Sommando $d\sigma_1$ e $d\sigma_2$ si ottiene la correzione totale alla sezione d'urto per scattering in $d\Omega$, $d\sigma_{e^2}$, dovuta all'interazione col campo elettromagnetico. È:

$$(16) \quad d\sigma_{e^2} \equiv d\sigma_{0e^2} - d\sigma_0 = \frac{2}{3\pi} \frac{e^2}{\hbar c} \times \\ \times \left[\int_0^{p_0^2/2m} \mathcal{R}_k \frac{p_k}{p_0} \frac{|\mathbf{p}_0 - \mathbf{p}_k|^2}{m^2 c^2} \frac{d\hbar c}{\hbar c} \frac{|k|}{|k|} - \mathcal{R}_0 \frac{|\mathbf{p}_0 - \mathbf{p}|^2}{m^2 c^2} \int_0^\infty \frac{d\hbar c}{\hbar c} \frac{|k|}{|k|} \right].$$

4. - Eliminazione della catastrofe infrarossa - divergenze alle alte frequenze.

Abbiamo testè asserito che l'espressione (16) rappresenta la correzione totale di ordine e^2 alla sezione d'urto per scattering in $d\Omega$. In effetti ciò non è ancora esatto in quanto, questa volta in maniera assai più riposta, abbiamo di nuovo trascurato delle quantità che sono dello stesso ordine e^2 di quelle che ci interessano. La ragione di questo fatto, notato da LEWIS [9] è la seguente:

nella deduzione della $d\sigma_0$ (1) abbiamo fatto uso della relazione tra energia e impulso:

$$(17) \quad E_p = \frac{p^2}{2m},$$

m essendo quella stessa che è comparsa finora in tutte le nostre equazioni. Ci si chiede: è questa la relazione che dovevamo usare volendo far calcoli corretti sino all'ordine e^2 ? In altre parole è l'energia di un elettrone libero di impulso \mathbf{p} data correttamente dalla (17) anche quando si consideri l'interazione dell'elettrone col campo elettromagnetico sino all'ordine e^2 ? È immediatamente chiaro come la risposta sia negativa. L'energia di un elettrone libero di impulso \mathbf{p} sino all'ordine e^2 non è data semplicemente dall'espressione $p^2/2m$. Occorre aggiungere a $p^2/2m$ quella che è la variazione di energia, chiamiamola W_p , dovuta all'interazione dell'elettrone col proprio campo elettromagnetico sino all'ordine e^2 , variazione di energia, che, nello schema della teoria delle perturbazioni, è dovuta all'emissione e al susseguente riassorbimento di un quanto (virtuale) di energia qualsiasi. Per un elettrone di impulso \mathbf{p} tale energia di interazione si calcola facilmente e risulta essere (a parte un termine indipendente da \mathbf{p} , che può essere inserito nella zero point-energy del campo elettromagnetico):

$$(17) \quad W_p = -\frac{2}{3\pi} \frac{e^2}{\hbar c} \frac{p^2}{m^2 c^2} \int_0^\infty d\hbar c |k|,$$

onde la relazione tra impulso ed energia, corretta fino all'ordine e^2 è:

$$(19) \quad E_p = \frac{p^2}{2m} \left(1 - \frac{4}{3\pi} \frac{1}{mc^2} \int_0^\infty d\hbar c |k| \right) = \frac{p^2}{2m} \left(1 - \frac{m_{\text{em}}}{m} \right),$$

avendo introdotto la massa elettromagnetica:

$$(20) \quad m_{\text{em}} = \frac{4}{3\pi} \frac{e^2}{\hbar c^3} \int_0^\infty d\hbar c |k|.$$

Di questa relazione (19), non già della (17), occorre far uso nel calcolo della (1), se si vuole avere un risultato corretto sino all'ordine e^2 . Risulta facilmente che se ciò vien fatto, alla (16) si viene ad aggiungere un altro termine di ordine e^2 il quale diverge linearmente corrispondentemente alla divergenza lineare in (19). Indicando tale termine, che non abbiamo qui bisogno di scrivere, con (div. lin.) , $d\sigma_e$ si riscrive finalmente in maniera corretta sino all'or-

dine e^2 , sotto la forma seguente:

$$(21) \quad d\sigma_{e^2} = \frac{2}{3\pi} \frac{e^2}{\hbar c} \left[\int_0^{p_0^2/2m} \mathcal{R}_k \frac{p_k}{p_0} \frac{|\mathbf{p}_0 - \mathbf{p}_k|^2}{m^2 c^2} \frac{d\hbar c |k|}{\hbar c |k|} - \mathcal{R}_0 \frac{|\mathbf{p}_0 - \mathbf{p}|^2}{m^2 c^2} \int_0^\infty \frac{d\hbar c |k|}{\hbar c |k|} \right] + \\ + (\text{div. lin.}).$$

Vorremmo insistere sul fatto che la (21) ora scritta è la formula effettivamente esatta fino all'ordine e^2 ; in essa si è finalmente tenuto conto effettivamente di tutti i termini di cui vi è da tener conto in un calcolo corretto.

Le formule dedotte nei precedenti numeri sono formule incomplete in quanto per una ragione o per un'altra non erano stati considerati in esse termini di ordine e^2 , che è quello che ci interessa e ciò senza alcuna giustificazione. Siamo voluti arrivare a gradi alla (21), considerando un termine dopo l'altro perchè storicamente è proprio così che ci si è arrivati; tuttavia a questo punto ci si può, se si vuole, scordarsi della deduzione a tappe della (21); e si può passare alla discussione della (21) stessa tenendo presente — lo ripetiamo ancora — che nell'ordine della teoria delle perturbazioni qui considerato la (21) è la formula in cui effettivamente nessun termine è stato dimenticato.

Quattro sono evidentemente i termini divergenti che compaiono nella (21); si ha la solita divergenza, considerata nel numero 2, di catastrofe infrarossa; si ha la divergenza logaritmica del secondo termine tanto verso le alte quanto verso le basse energie del quanto virtuale $|k|$; e si ha infine la (div. lin.).

Si potrebbe quindi pensare che con lo svolgere coerentemente la teoria delle perturbazioni si è ancora peggiorata la situazione rispetto a come appariva nel numero 2.

Si potrebbe dire infatti che, mentre se si considerava il solo termine $d\sigma_1$ (12*) si aveva la sola divergenza logaritmica di catastrofe infrarossa, ora nella (21) si hanno le quattro divergenze anzidette. A parte il fatto che, come ci sembra di aver sufficientemente chiarito, il considerare il solo termine $d\sigma_1$ non ha alcun senso in quanto significa trascurare dei termini di ordine e^2 , ciò che non è affatto legittimo, non è tuttavia vero che la situazione sia peggiorata. Anzitutto si vede facendo effettivamente l'integrazione del secondo termine della (21), che la *catastrofe infrarossa scompare nella (21) in quanto esattamente compensata dalla divergenza logaritmica alle basse energie del termine di correzione elastica*, divergenza che ha segno opposto a quello della catastrofe infrarossa.

Scompare così quella divergenza alle basse frequenze che costituiva la caratteristica di questo problema in quanto, come è ben noto nei problemi di elettrodinamica si presentano spesso negli ordini superiori delle divergenze, ma non dalla parte delle basse frequenze bensì dalla parte delle alte.

Restano tuttavia ancora due divergenze, quella logaritmica dello scattering

elastico alle alte frequenze e quella lineare del termine (div. lin.) pure alle alte frequenze. Onde il risultato estremamente insoddisfacente di avere una correzione infinita allo scattering di Rutherford per effetto dell'accoppiamento del campo elettromagnetico continua a sussistere.

Fissando anzitutto l'attenzione sulla divergenza lineare ci si chiede a questo punto: qual'è la ragione fisica per cui essa si presenta? È possibile, indagando qual'è questa ragione, trovare un qualche criterio fisicamente ragionevole ed inambiguo per evitare la divergenza stessa? Risponderemo (affermativamente) nel prossimo numero. Per quanto riguarda la divergenza logaritmica alle alte frequenze notiamo fin d'ora che essa è assai meno grave potendosi senz'altro evitare semplicemente tenendo conto del rinculo dell'elettrone — si noti che il non tener conto del rinculo dell'elettrone equivale ad attribuirgli un impulso ed una energia infiniti — o meglio con una trattazione relativistica del problema (n. 6).

5. — Rinormalizzazione della massa.

Fissiamo dunque l'attenzione sulla (div. lin.) e, per evitare giri di parole introduciamo subito la grandezza (infinita)

$$(22) \quad m_f = m + m_{em};$$

m_f sarà nel seguito detta massa fisica (massa sperimentale) dell'elettrone ed m_{em} massa elettromagnetica; la (19) può allora essere scritta ⁽¹⁰⁾ a meno di termini di ordine superiore ad e^2 :

$$(23) \quad E_p = \frac{p^2}{2m_f},$$

avendo immaginato nel passaggio da (19) a (23) uno sviluppo in serie di McLaurin per $e = 0$.

Si ha allora in virtù del modo stesso in cui il termine (div. lin.) è venuto ad introdursi nelle nostre formule, e rifacendo i passaggi alla rovescia, che

⁽¹⁰⁾ Poichè m_{em} è una quantità infinita un tale sviluppo non ha evidentemente dal punto di vista matematico alcun senso. Tuttavia si può osservare che il fatto che m_{em} risulti infinita è associato al troppo grande numero di oscillatori di radiazione alle alte frequenze. Si può quindi immaginare questo troppo grande numero di oscillatori ridotto alle alte frequenze con qualche artificio in modo che m_{em} non sia più divergente ed in modo quindi da poter eseguire il passaggio dalla (19) alla (22), salvo poi a far scomparire l'artificio quando (vedasi più avanti) si sia rinormalizzata la massa. È questo lo spirito di un noto lavoro di FEYNMANN [17]. Nel seguito, ove ciò sia necessario, sottintenderemo di compiere ragionamenti di tale tipo.

la (21) può risciversi (sempre a meno di termini di ordine superiore):

$$(24) \quad d\sigma_e = \frac{2}{3\pi} \frac{e^2}{\hbar c} \left[\int_0^{p_0^2/2m} \mathcal{R}_{k(m=m_f)} \frac{p_k}{p_0} \frac{|\mathbf{p}_0 - \mathbf{p}_k|^2}{m_f^2 c^2} \frac{d\hbar c |k|}{\hbar c |k|} - \right. \\ \left. - \mathcal{R}_{0(m=m_f)} \frac{|\mathbf{p}_0 - \mathbf{p}_k|^2}{m_f^2 c^2} \int_0^\infty \frac{d\hbar c |k|}{\hbar c |k|} \right],$$

ossia esattamente nella forma (16) ove m sia sostituita con m_f ovunque compaia; ricordiamo infatti che nella nostra deduzione « a tappe » della (21) il termine (div. lin.) è venuto ad introdursi nel modo seguente: ci siamo ad un certo punto accorti che la (16) non era corretta in quanto nella sua deduzione avevamo fatto uso di una relazione tra energia ed impulso:

$$(17) \quad E_p = \frac{p^2}{2m},$$

che non è corretta fino all'ordine e^2 ; è stato precisamente il fare uso della relazione corretta

$$(19) \quad E_p = \frac{p^2}{2m} - \frac{p^2}{2m^2} m_{em},$$

che ha portato all'aggiunta del termine (div. lin.) ma poichè come abbiamo or ora visto, la (19) si può scrivere (a parte termini di ordine superiore) nella forma:

$$E_p = \frac{p^2}{2m_f},$$

che differisce dalla (17) semplicemente per la sostituzione di m con m_f è chiaro che la (21) potrà anche risciversi (a parte sempre termini di ordine superiore) sotto la forma (16) ove m sia dappertutto sostituita con m_f , cioè precisamente sotto la forma (24). Naturalmente non si tratta sinora che di un passaggio del tutto formale; la divergenza lineare non è eliminata in quanto compare in m_f , e, se si sostituisce nuovamente nella (24) ad m_f la sua espressione (22), si riotterrebbe evidentemente la (21). In altre parole la (24) non è per ora che un modo diverso di scrivere la (21). Ma la possibilità di scrivere la (19) nella forma (23) fa nascere spontanea la questione: qual'è il significato della grandezza m nelle equazioni sinora usata? E con quale diritto, quando facciamo i conti sostituiamo noi ad m il valore della massa sperimentalmente osservata? Dato che non è mai possibile scindere l'elettrone dal proprio campo elettromagnetico la energia di un elettrone libero di impulso \mathbf{p} è, qualunque sia il significato che si voglia attribuire ad m non già $p^2/2m$ ma per quanto

abbiamo detto:

$$(23^*) \quad E_p = \frac{p^2}{2m_f},$$

onde al posto di m_f e non già al posto di m , occorre inserire il valore della massa sperimentalmente osservata; m_f e non già m , è la massa fisica dell'elettrone. La ragione della divergenza formale di m_f è da ricercarsi nel nostro modo, probabilmente non corretto, di considerare in generale i problemi di elettrodinamica; ma il punto fondamentale è il seguente: se si ammette come risulta essere necessario dal ragionamento precedente, che m_f e non m sia la massa sperimentale dell'elettrone, *se si sostituisce cioè al posto di m_f e non di m il valore sperimentale della massa stessa*, la nostra formula (21) risulta priva della divergenza lineare; tale divergenza è stata, come si usa dire, eliminata mediante una «rinormalizzazione della massa».

Vogliamo notare, per inciso, che il criterio ora esposto di rinormalizzazione della massa si presta ad essere applicato naturalmente in forma conveniente ad un qualsiasi problema di elettrodinamica; ed al contrario di criteri suggeriti in epoche precedenti per togliere le infinità dalle formule di elettrodinamica quantistica (λ -limiting process di WENTZEL - DIRAC ⁽¹¹⁾, teoria del damping di HEITLER-WILSON ⁽¹²⁾, ecc.), i quali avevano carattere puramente formale è fisicamente assai ben fondato. Da tutto il lavoro di questi ultimi anni sembra che almeno sino ad ordini sufficientemente bassi nello sviluppo in serie di e della teoria delle perturbazioni il criterio di rinormalizzazione della massa, unito ad altri criteri consimili di rinormalizzazione (della carica) sia effettivamente atto ad evitare le divergenze nelle formule della elettrodinamica quantistica.

Nonostante la rinormalizzazione della massa, ossia nonostante la eliminazione del termine (div. lin.) resta nella (21) ancora la divergenza logaritmica del secondo termine alle alte frequenze. Se tale divergenza non può essere in qualche modo evitata ciò significa ancora il fallimento della elettrodinamica. Ma poichè si tratta di una divergenza alle altre frequenze viene facilmente in mente che essa possa essere evitata mediante una trattazione in cui si tenga conto del rinculo dell'elettrone o più coerentemente mediante una trattazione relativistica del problema. Infatti l'emissione di un quanto virtuale di energia sufficientemente alta implica la necessità di abbandonare l'approssimazione di dipolo ($\hbar k \ll p_0, p$); e poichè tale emissione se $|k| \geq m_f c^2$ provoca un rinculo dell'elettrone con velocità relativistica, *anche se p_0/m_f e p/m_f sono $\ll c$* , una trattazione relativistica viene a rendersi necessaria. Mostriamo nel numero seguente come procedere in maniera relativistica tolga in effetti ogni diver-

⁽¹¹⁾ G. WENTZEL: Ref. [1], pag. 152.

⁽¹²⁾ W. HEITLER: Ref. [1], pag. 240.

genza; in altre parole la presenza della divergenza logaritmica in discussione dipende dall'aver noi trattato ingiustificatamente il problema in maniera non relativistica; può, per inciso, essere utile rilevare che i risultati cui con la trattazione relativistica si giungerà sono grosso modo gli stessi a cui si giungerebbe semplicemente tagliando l'integrale divergente in (24)

$$\int_0^{\infty} \frac{d\hbar c}{\hbar c} \left| \frac{k}{k} \right|,$$

ad energie dell'ordine di $m_e c^2$ alle quali la trattazione non relativistica comincia a non essere più valida. Con ciò non figura più nella (21) alcuna divergenza; e si vede, quando si svolgono i calcoli, che la correzione complessiva alla sezione d'urto per scattering in $d\Omega$ di ordine e^2 viene ad essere effettivamente piccola rispetto alla (1).

6. — Trattazione relativistica.

Nel caso relativistico l'hamiltoniano che caratterizza il nostro sistema non è più dato evidentemente dalla (4) ma risulta notoriamente essere, secondo le prescrizioni della teoria del positrone, dato da (unità di Heaviside):

$$(25) \quad H^{(R)} = -\hbar c \int \Psi^*(\mathbf{x}) \left[\boldsymbol{\alpha} \cdot \text{grad} - i \frac{mc}{\hbar} \beta \right] \Psi(\mathbf{x}) d^3\mathbf{x} + \\ + \frac{1}{2} \sum_k \{ c^2 p_k p_{-k} + k^2 q_k q_{-k} \} + e \int \Psi^*(\mathbf{x}) V(\mathbf{x}) \Psi(\mathbf{x}) d^3\mathbf{x} - \\ - e \int \Psi^*(\mathbf{x}) \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{A}_{\text{tr}}(\mathbf{x}) \Psi(\mathbf{x}) d^3\mathbf{x}.$$

Nella (25) $\Psi(\mathbf{x})$, $\Psi^*(\mathbf{x})$ sono gli spinori operatori del campo elettrone-positrone (di componenti $\Psi_\sigma(\mathbf{x})$) soddisfacenti alle regole di commutazione di Jordan e Wigner:

$$(26) \quad [\Psi_\sigma(\mathbf{x}), \Psi_{\sigma'}^*(\mathbf{x}')]_{+} = \delta_{\sigma\sigma'} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \quad [\Psi_\sigma(\mathbf{x}), \Psi_{\sigma'}(\mathbf{x}')]_{+} = \text{etc.} = 0;$$

$\boldsymbol{\alpha}$ e β sono le usuali matrici di Dirac e p_k , q_k , $\mathbf{A}_{\text{tr}}(\mathbf{x})$, sono le stesse grandezze già definite a proposito dell'hamiltoniano non relativistico (4) caratterizzanti il campo elettromagnetico.

L'hamiltoniano (25) è scritto avendo tralasciato la self-energia coulombiana statica:

$$(27) \quad \frac{e^2}{8\pi} \iint \Psi^*(\mathbf{x}) \Psi(\mathbf{x}) \left[\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right] \Psi^*(\mathbf{x}') \Psi(\mathbf{x}') d^3\mathbf{x} d^3\mathbf{x}',$$

ed avendo utilizzato per brevità di scrittura la rappresentazione nello spazio delle configurazioni per il campo materiale e quella nello spazio degli impulsi per il campo elettromagnetico.

Alla luce della teoria precedentemente svolta nell'approssimazione non relativistica, anche nel caso relativistico, cioè quando si faccia uso del sopra accennato formalismo della teoria del positrone per descrivere l'elettrone, occorrerà, per calcolare le correzioni radiative di ordine e^2 :

1) calcolare mediante la teoria delle perturbazioni tutte le modificazioni di ordine e^2 da apportare alla (2);

2) compiere le necessarie rinormalizzazioni.

È anzitutto chiaro che anche qui comparirà la catastrofe infrarossa e che anche qui essa sarà eliminata mediante la compensazione spiegata nel numero precedente tra scattering anelastico e scattering elastico. Infatti alle basse frequenze del quanto reale o virtuale emesso le formule che si deducono in approssimazione relativistica devono ridursi a quelle ricavate nella trattazione non relativistica quando si faccia l'ipotesi semplificativa che qui faremo, che la velocità iniziale dell'elettrone sia piccola rispetto alla velocità della luce ⁽¹³⁾.

Sistemata la questione della catastrofe infrarossa resterà anche qui la questione delle divergenze alle alte frequenze; di che tipo saranno qui queste divergenze? Saranno queste divergenze tali da scomparire quando si compia la rinormalizzazione, ossia quando si sostituisca nelle nostre formule il valore finito sperimentale della massa al posto della quantità infinita $m + m_{em}$? O non rimarranno anche dopo la rinormalizzazione come succedeva nel caso non relativistico rendendo privi di senso i risultati? Tutte queste domande si pongono immediatamente; chè, ove si giungesse al risultato che la rinormalizzazione è qui insufficiente a togliere completamente le divergenze, il criterio di rinormalizzazione perderebbe tutto il suo valore; mentre nel caso opposto la nostra fiducia in esso sarebbe grandemente rafforzata, potendosi allora concludere che la divergenza che ancora rimane nella (24) è dovuta al fatto che la teoria con la quale si è giunti alla (21) è non relativistica: come abbiamo accennato alla fine del numero precedente, vedremo che proprio questo è il caso.

⁽¹³⁾ Occorre fare attenzione al fatto che l'ipotesi (qui introdotta a scopo semplificativo) che la velocità iniziale (e quindi finale) dell'elettrone sia piccola rispetto alla velocità della luce non rende inutile, come si potrebbe essere indotti a pensare la trattazione relativistica. Questa è necessaria fra l'altro in quanto, anche se le velocità iniziale e finale dell'elettrone sono piccole, negli stati intermedi (virtuali) l'elettrone acquista impulsi grandi a piacere. In conseguenza di questa circostanza la trattazione relativistica si rende necessaria. Si può anzi dire qualche cosa di più: per quel che abbiamo or ora detto ci si deve aspettare che le formule dedotte precedentemente (con la trattazione non relativistica) si conservino valide anche nella trattazione relativistica (naturalmente nell'ipotesi $p_0/m_f \ll c$) se nella loro deduzione non sono intervenuti stati intermedi in cui l'elettrone ha impulso grande a piacere (ciò è ad esempio per la (12*)); mentre invece è da aspettarsi che dette formule vengano modificate dalla trattazione relativistica ove negli stati intermedi l'elettrone possa assumere impulsi grandi a piacere (formula (15)). Vedremo come ciò sia in effetti verificato.

Rileviamo anzitutto che nella teoria del positrone, nella teoria relativistica la self-energia di un elettrone libero di impulso \mathbf{p} dovuta all'interazione con il campo elettromagnetico, non è naturalmente più data dalla (18) ma presenta invece una divergenza che, anzichè essere lineare, è logaritmica. Conseguentemente la massa elettromagnetica si scrive in una teoria relativistica anzichè nella forma (20), sotto la forma:

$$(29) \quad m_{\text{em}}^{(R)} = \frac{3}{2\pi} \frac{e^2}{\hbar c} m \int_{\neq 0}^{\infty} \frac{d|k|}{|k|} + \text{termini finiti},$$

fino all'ordine e^2 . Si può allora subito dire quanto segue: se deve avvenire, come abbiamo preannunciato, che la rinormalizzazione della massa tolga nel caso in cui si facciano i calcoli relativisticamente le divergenze da quella che verrà ad essere la formula analoga alla (21) occorre che tali divergenze siano logaritmiche; in quanto con sottrazioni di espressioni contenenti divergenze del tipo (29), cioè logaritmiche, non si possono evidentemente far scomparire divergenze di tipo non logaritmico.

Vediamo allora di scrivere nella teoria relativistica quello che risulta essere a conti fatti l'analogo della (21), cioè la correzione di ordine e^2 alla (2) tenuto conto di *tutti* i termini di ordine e^2 ; nell'ipotesi sopradetta che sia $p_0/m_f \ll c$ l'analogo della (21) si trova essere ⁽¹⁴⁾:

$$(30) \quad \left\{ \begin{aligned} d\sigma_s^{(R)} &= -\frac{3}{2\pi} \frac{e^2}{\hbar c} \mathcal{R}_0 \frac{|\mathbf{p} - \mathbf{p}_0|^2}{2m^2 c^2} \int_{\neq 0}^{\infty} \frac{d\hbar c}{\hbar c} \frac{|k|}{|k|} - \\ &\quad - \frac{2}{3\pi} \frac{e^2}{\hbar c} \mathcal{R}_0 \frac{|\mathbf{p} - \mathbf{p}_0|^2}{m^2 c^2} \int_0^{\infty} \frac{d\hbar c}{\hbar c} \frac{|k|}{|k|} + \mathcal{R}_0 \cdot (\text{termini finiti}) + \\ &\quad + \frac{2}{3\pi} \frac{e^2}{\hbar c} \int_0^{p_0^2/2m} \mathcal{R}_k \frac{p_k}{p_0} \frac{|\mathbf{p}_0 - \mathbf{p}_k|^2}{m^2 c^2} \frac{d\hbar c}{\hbar c} \frac{|k|}{|k|} = (30_1) + (30_2); \\ (30_1) &= \frac{e^2}{\pi \hbar c} \mathcal{R}_0 \left(\frac{p_0}{mc} \right)^2 (1 - \cos \theta) \times \\ &\quad \times \left[-\frac{43}{36} + \frac{4}{3} \lim_{k \rightarrow 0} \log 2k + \frac{3}{2} \lim_{k \rightarrow \infty} \log 2k \right]; \\ (30_2) &= \frac{e^2}{\pi \hbar c} \mathcal{R}_0 \left(\frac{p_0}{mc} \right)^2 (1 - \cos \theta) \times \\ &\quad \times \left[-2 + \frac{4}{3} \log 2 + \frac{8}{3} \log \frac{p_0}{mc} - \frac{4}{3} \lim_{k \rightarrow 0} \log 2k \right]. \end{aligned} \right.$$

⁽¹⁴⁾ Vi è però un punto estremamente importante da considerare: in realtà la (30) ora scritta non è del tutto corretta. Sono stati in essa tralasciati i termini divergenti

Abbiamo scritto la (30) in due forme diverse per la notazione di cui la seconda è l'espressione completa e la prima ha lo scopo di mostrare le rassomiglianze e le differenze con la formula (21) non relativistica.

Nella ultima riga della (30) compare la correzione anelastica (30₂) allo scattering, che in virtù dell'ipotesi $p_0/m_f \ll c$ coincide, come abbiamo precedentemente spiegato (13), con la formula dedotta col calcolo non relativistico. Ciò non è per la correzione (elastica) che compare nella penultima riga (30₁), a causa del fatto, pure spiegato più sopra, che nel calcolo di tale correzione figurano stati intermedi in cui l'elettrone ha impulso grande a piacere. Si noti che la (30) è l'analogo della (21), analogo nel senso che in essa si è tenuto effettivamente conto di tutti i termini sino all'ordine e^2 .

Come si vede nella (30), oltre alle divergenze logaritmiche alle basse frequenze, che al solito si elidono, compaiono divergenze soltanto logaritmiche alle alte frequenze; ciò rende, come già detto, possibile eliminare le divergenze in questione rinormalizzando la massa; tale rinormalizzazione è qui alquanto più complicata che nel caso relativistico; nel caso non relativistico era stato lo stesso procedimento di deduzione della (21) che ci aveva suggerito di eliminare la divergenza lineare rinormalizzando la massa; qui, sebbene si possa applicare esattamente lo stesso criterio di rinormalizzazione, di sostituire cioè il valore sperimentale finito della massa al posto della quantità infinita $m + m_{em}$ (con m_{em} data ora da (29)), occorre tuttavia fare un po' più di attenzione in quanto la separazione tra i vari termini non è nel caso relativistico netta come nel caso non relativistico.

In ogni modo si vede che in effetti anche qui con la rinormalizzazione le divergenze scompaiono e si arriva alla correzione finita seguente:

$$(31) \quad d\sigma_{e^2}^{(R)} = \frac{e^2}{\pi \hbar c} \left(\frac{Ze^2}{2m_f v_0^2} \right)^2 \frac{d\Omega}{\sin^4 \frac{\theta}{2}} \beta_0^2 (1 - \cos \theta) \left[-3 + \frac{8}{3} \log 2\beta_0 \right] \quad \left(\beta_0 = \frac{v_0}{c} \right).$$

La (31) giustifica quanto si era detto; cioè il tener conto della formulazione relativistica è in questo caso (ed anche in altri analoghi) equivalente all'incirca a tagliare la formula ottenuta non relativisticamente ad energie dei quanti virtuali dell'ordine di $m_f c^2$, dove la trattazione relativistica comincia a diventare essenziale: infatti facendo i conti a partire dalla (24) in cui si sia tagliato

che provengono dalla cosiddetta « polarizzazione del vuoto » che si presenta nella teoria del positrone.

Per semplicità qui ed in tutto il seguito tali termini non saranno considerati sistematicamente; si procederà in altre parole come se tali termini addirittura non esistessero. Diciamo qui soltanto che le divergenze che tali termini contengono possono essere eliminate mediante una « rinormalizzazione della carica » dell'elettrone; e gli effetti osservabili (vedi oltre) che si hanno sono assai piccoli.

l'integrale:

$$\int_0^{\infty} \frac{d\hbar c |k|}{\hbar c |k|},$$

ad energie dell'ordine di $\hbar c |k| = m_e c^2$ si ottiene all'incirca la (31) ⁽¹⁵⁾.

La espressione (31), finalmente risolve in modo soddisfacente il problema postoci. Il punto fondamentale da notare è che essa è finita e che è di un ordine di grandezza piccolo rispetto alla (1). Col criterio di rinormalizzazione siamo riusciti (nel caso relativistico) ad eliminare in modo inambiguo le infinità giungendo ad una espressione del tutto plausibile per le correzioni di ordine e^2 alla (1).

La (31) è stata ottenuta da Koba e collaboratori [13] e indipendentemente da Lewis [11] facendo uso della teoria delle perturbazioni standard. Ultimamente SCHWINGER [14] ha trattato la stessa questione coi suoi metodi che hanno il vantaggio di far risultare chiaramente la covarianza relativistica giungendo sostanzialmente agli stessi risultati.

In realtà DANCOFF [10] nel 1939 fu il primo a fare il calcolo relativistico, sempre con la teoria delle perturbazioni; a quel tempo i criteri rinormalizzativi non erano stati inventati; inoltre la formula (21) si pensava (scorrettamente), scritta, per una ragione che risulterà chiara dal seguito (parte II), senza il termine (div. lin.), di modo che in essa compariva soltanto la divergenza logaritmica alle alte frequenze. DANCOFF era perciò autorizzato a ragionare nel modo seguente: se una teoria non relativistica contiene soltanto una divergenza logaritmica è sperabile che una teoria relativistica dia luogo ad un risultato del tutto privo di divergenze. Sarà questo vero?

DANCOFF trovò che la cosa non era vera. La correzione allo scattering elastico trovata da DANCOFF divergeva ancora logaritmicamente. Dal nostro punto di vista questo risultato non ci sorprende; è proprio il risultato che, come abbiamo detto più sopra, ci si deve aspettare se vogliamo che i criteri di rinormalizzazione siano efficaci. Ma, dal punto di vista di DANCOFF, il risultato stesso costituiva veramente una seria difficoltà per la elettrodinamica, in quanto sembrava mostrare come, nemmeno svolgendo i calcoli relativisticamente, si ottenevano dei risultati finiti per la correzione radiativa alla sezione d'urto per scattering. Vi è un altro punto da considerarsi; ed è che DANCOFF, nello svolgere il calcolo commise un errore arrivando anzichè al risultato (30₁) per la correzione radiativa allo scattering elastico ad una formula in cui il terzo termine differisce da quello della (30₁) per il fattore numerico 8/9 ed è proporzionale, anzichè a $3/2 \lim_{k \rightarrow \infty} \log 2k$, a $4/3 \lim_{k \rightarrow \infty} \log 2k$.

$k \rightarrow \infty$

$k \rightarrow \infty$

⁽¹⁵⁾ Vedasi Ref. [11], pag. 272, oppure Ref. [7].

Mentre, come è stato visto, la rinormalizzazione della massa in (30) elimina la divergenza, ciò non è vero se si ha al posto del termine $\frac{3}{2} \lim_{k \rightarrow \infty} \log 2k$ il termine $\frac{4}{3} \lim_{k \rightarrow \infty} \log 2k$. Sono stati LEWIS e Koba e collaboratori a far notare

come il risultato di DANCOFF fosse errato ed a mostrare come le divergenze potessero essere eliminate dalla formula corretta (30) con la rinormalizzazione della massa.

È opportuna a questo punto una questione di nomenclatura: come abbiamo visto, ottenute che si siano con la teoria delle perturbazioni le *correzioni globali* di ordine e^2 alla formula per la sezione d'urto ((21) nel caso non relativistico, (30) nel caso relativistico), non tutto è fatto; occorre compiere una certa operazione, che abbiamo per il significato fisico chiamato «rinormalizzazione della massa»; le formule ottenute non hanno senso sino a quando non si sia rinormalizzata in esse la massa in quanto, quando poi volessimo mettere i numeri nelle nostre formule non sarebbe corretto sostituire il valore sperimentale della massa al posto di m , ma occorre invece sostituire tale valore al posto di $m + m_{em}$; e, come abbiamo visto, (ed è stata proprio questa la ragione che ci ha indotti a fissare l'attenzione sui vari concetti di massa elettromagnetica, massa sperimentale, ecc.) la rinormalizzazione della massa ci lascia, nel caso non relativistico con formule in cui le divergenze sono assai attenuate e nel caso relativistico con formule del tutto prive di divergenza e del tutto ragionevoli.

Nelle formule che ci danno le *correzioni globali* di ordine e^2 giova allora distinguere tra due tipi di termini: termini che permangono quando si sia rinormalizzata la massa, e questi prendono il nome di termini reattivi o effetti reattivi della radiazione; e termini che invece scompaiono, che prendono il nome di termini inerziali o effetti inerziali. Insistiamo sul fatto che le modificazioni *fisicamente osservabili* alle formule di ordine zero provengono unicamente dagli effetti reattivi; i termini inerziali presentandosi solo in quanto abbiamo fatto uso inizialmente, a torto, di un m che non è la massa sperimentale, ma ne differisce anzi per una quantità infinita (m_{em}).

Si tratta perciò in generale (in generale significa qui: prescindendo dal nostro specifico problema), di separare gli effetti inerziali da quelli reattivi e di vedere se questi ultimi sono finiti e portano a correzioni in accordo con l'esperienza. Nel caso del problema particolare di scattering al quale in questa rassegna dobbiamo necessariamente limitare la nostra attenzione, le cose sono relativamente semplici ed in particolare la separazione tra termini reattivi ed inerziali si può effettuare con relativa semplicità. In altri casi però le cose non sono così semplici ed occorre trovare dei metodi che consentano tale separazione.

Tali criteri introdotti inizialmente (dopo il primo lavoro di BETHE [2]) da TOMONAGA [4], LEWIS ed EPSTEIN, sono stati perfezionati in seguito e sono

tuttora in via di perfezionamento ad opera specialmente di SCHWINGER [14], FEYNMANN [17], DYSON [15], PAULI e VILLARS [16].

Infine una parola sull'ordine di grandezza della correzione radiativa di ordine e^2 alla sezione d'urto per scattering. Si vede facilmente che per velocità tali che la condizione $p_0/m_f \ll c$ sia soddisfatta, la correzione è dell'ordine di 10^{-3} rispetto alla sezione d'urto di Rutherford relativistica; si è perciò per il momento al di fuori di una possibile verifica sperimentale.

PARTE II

IL METODO DI BLOCH-NORDSIECK

7. — La trasformazione canonica di Bloch-Nordsieck.

Nella prima parte di questa rassegna abbiamo mostrato come sia possibile una trattazione coerente ed ottenere dei risultati ragionevoli per il problema delle correzioni radiative allo scattering mediante la teoria delle perturbazioni (per lo meno nella approssimazione e^2) quando:

1) si tenga effettivamente conto di tutti i termini che intervengono nell'ordine considerato;

2) si faccia uso nelle formule di quella che si deve pensare sia la massa sperimentale dell'elettrone, cioè si rinormalizzi la massa.

Quando si tenga conto di queste due avvertenze è stato visto come la trattazione relativistica conduca ad una correzione piccola (data dalla (31)) alla sezione d'urto di approssimazione zero (1) o (2).

Si è pure visto come la divergenza dovuta alla catastrofe infrarossa non reca alcun disturbo in quanto è originata dal non tener conto dell'avvertenza 1) cioè dal trascurare incorrettamente dei termini dello stesso ordine di quelli che andiamo cercando, e scompare tenendo conto dei termini di scattering elastico.

Nel loro attacco al problema, precedente agli sviluppi testè accennati, BLOCH-NORDSIECK [5] ⁽¹⁶⁾ non si resero conto di questa circostanza e ritennero senz'altro, come accennammo nel numero 3, l'uso della teoria delle perturbazioni responsabile del risultato infinito (12*) per la correzione di ordine e^2 . B-N probabilmente non pensarono affatto alla possibilità di considerare

⁽¹⁶⁾ Nel seguito B-N.

i termini misti:

$$(14) \quad (0)^*(e^2) + (0)(e^2)^*,$$

ma occorre dire che, se anche vi avessero pensato, essi probabilmente non avrebbero neppure intrapreso il calcolo di tali termini in quanto era ben noto che le approssimazioni della teoria delle perturbazioni superiori alla prima divergevano, come è di fatto, alle alte frequenze, e non si poteva d'altra parte certamente prevedere a priori che la considerazione di tali termini avrebbe portato ad una compensazione esatta di infinità dal lato delle basse frequenze, cioè all'eliminazione della divergenza di catastrofe infrarossa. Inoltre lo scopo principale dell'indagine di B-N era non già quello di esaminare la correzione alla sezione d'urto per scattering, bensì quella di esaminare come andava modificata la sezione d'urto per Bremsstrahlung alle basse energie.

B-N si studiarono di trovare un metodo che evitasse l'uso della teoria delle perturbazioni e che permettesse perciò una soluzione esatta, almeno in certe approssimazioni dell'equazione di Schrödinger (7) caratterizzata dall'hamiltoniano:

$$(32) \quad H = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta_x + V(\mathbf{x}) + \frac{ie}{mc} \frac{\hbar}{V^{1/2}} \sqrt{\frac{\hbar c}{2}} \sum_k \frac{(e_k \cdot \text{grad})}{\sqrt{|k|}} (a_k + a_{-k}^*) \exp[i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}] + \\ + \frac{e^2}{2mc^2} \frac{1}{V} \frac{\hbar c}{2} \sum_k \sum_{k'} \frac{(\mathbf{e}_k \cdot \mathbf{e}_{k'})}{\sqrt{|k|} \cdot |k'|} (a_k + a_{-k}^*)(a_{k'} + a_{-k'}^*) \exp[i(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \cdot \mathbf{x}] + \\ + \frac{1}{2} \sum_k \hbar c |k| (a_k^* a_k + a_{-k} a_{-k}^*).$$

In quanto segue ci riferiremo alla trattazione del metodo di B-N rielaborata da FIERZ e PAULI [8] (F-P) tenendo però presenti, ove ciò abbia interesse, gli sviluppi primitivi di B-N.

Il lavoro originario di B-N è svolto in maniera semi-relativistica, la parola semi-relativistica andando intesa sostanzialmente nel senso dell'approssimazione di limitarsi alle piccole componenti della funzione d'onda.

La trattazione (più coerente) di F-P è completamente non relativistica, ossia parte dall'hamiltoniana non relativistica (32). I risultati di tale trattazione, possono perciò essere messi direttamente in relazione con quelli ottenuti mediante la teoria delle perturbazioni in approssimazione non relativistica (parte I, n. 5).

L'idea fondamentale del metodo è allora la seguente: se ci mettiamo nell'approssimazione di dipolo, ossia se poniamo $\mathbf{k} = 0$ nel termine di interazione in (32), e se in più trascuriamo in (32) il termine A^2 , è immediato trovare una trasformazione canonica (lineare) tale che l'hamiltoniana (32), in assenza di forze esterne ($V(\mathbf{x}) = 0$), risulti a variabili separate quando si compia la trasformazione canonica in questione: in modo che, nelle dette ipotesi, l'equa-

zione di Schrödinger che così si ottiene è senz'altro integrabile mentre ciò non era delle equazioni (6) o (7) in quanto comparivano in esse i termini (8_1) , (8_2) contenenti contemporaneamente le coordinate dell'elettrone e quelle del campo.

Per mostrare quanto asserito, introduciamo nell'hamiltoniano (32), fatte le semplificazioni ora dette ⁽¹⁷⁾, in luogo delle vecchie variabili canoniche \mathbf{x} , \mathbf{p} , a_k , a_k^* le nuove variabili, pure esse canonicamente coniugate:

$$(33) \quad \begin{cases} \mathbf{X} = \mathbf{x} + i\hbar \sum_k \boldsymbol{\gamma}_k \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} (a_k - a_k^*), & Q_k = i \sqrt{\frac{1}{2}} (a_k - a_k^*), \\ \mathbf{P} = \mathbf{p} & P_k = \sqrt{\frac{1}{2}} (a_k + a_k^*) - (\boldsymbol{\gamma}_k \cdot \mathbf{p}), \end{cases}$$

avendo posto per brevità:

$$(34) \quad \begin{cases} \mathbf{P} = -i\hbar \text{grad}_{\mathbf{x}} \\ \mathbf{P} = -i\hbar \text{grad}_{\mathbf{x}} \end{cases} \quad \boldsymbol{\gamma}_k = \frac{2e}{m} \frac{1}{\hbar c |k|} \left(\frac{\pi \hbar}{c |k|} \right)^{1/2} \mathbf{e}_k;$$

nelle (34) tutto è stato normalizzato all'unità di volume e si è abolito l'uso delle unità di Heaviside.

L'hamiltoniano (32) (fatto in esso $\mathbf{k} = 0$, $A^2 = 0$) assume nelle nuove variabili, come si verifica subito, la forma:

$$(35) \quad -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta_X + \frac{1}{2} \sum_k \hbar c |k| (P_k^2 + Q_k^2) + V(\mathbf{X} - \hbar \sum_k \boldsymbol{\gamma}_k Q_k) - \\ - \frac{1}{2} \sum_k (\boldsymbol{\gamma}_k \cdot \mathbf{P})^2 \hbar c |k|.$$

La (33) prende il nome di *trasformazione canonica di B-N*. Se $V(\mathbf{x}) = 0$ (elettrone libero) (35) si semplifica in:

$$(36) \quad -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta_X + \frac{1}{2} \sum_k \hbar c |k| (P_k^2 + Q_k^2) - \frac{1}{2} \sum_k (\boldsymbol{\gamma}_k \cdot \mathbf{P})^2 \hbar c |k|.$$

L'hamiltoniana (36) è evidentemente a variabili separate. Prima di passare alla considerazione della equazione di Schrödinger associata all'hamiltoniana (35), fermiamoci un momento sull'hamiltoniana (36) ora ottenuta. Si rileva come in essa compaia un termine infinito. È infatti:

$$(37) \quad -\frac{1}{2} \sum_k (\boldsymbol{\gamma}_k \cdot \mathbf{P})^2 \hbar c |k| = -\frac{2}{3\pi} \frac{e^2}{\hbar c} \frac{P^2}{m^2 c^2} \int_0^\infty d\hbar c |k|,$$

⁽¹⁷⁾ Queste approssimazioni saranno nel seguito brevemente indicate con: $\mathbf{k} = 0$, $A^2 = 0$.

avendo tenuto presente la relazione di passaggio dal discreto al continuo:

$$(38) \quad \sum_{k,r} = \frac{2}{(2\pi)^3} \int dk_x dk_y dk_z.$$

È da notarsi come il termine infinito (37) rappresenta la self-energia elettromagnetica trasversale del nostro elettrone libero di impulso \mathbf{P} sino all'ordine e^2 . Cosa si può fare del termine infinito (37)? F-P hanno adottato la via sbrigativa di sottrarlo semplicemente, scrivendo così l'hamiltoniana priva di divergenze seguente:

$$(36^*) \quad -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta_X + \frac{1}{2} \sum_k \hbar c |k| (P_k^2 + Q_k^2).$$

F-P hanno cercato di giustificare la sottrazione nel modo seguente: come è noto si possono ottenere in un qualsiasi problema di elettrodinamica risultati non infiniti alle alte frequenze con l'attribuire semplicemente un raggio finito all'elettrone: ciò è chiaro, in quanto, quando si passi allo spazio degli impulsi dei quanti, equivale ad ammettere l'esistenza di una frequenza massima dei quanti stessi. Pur di fare il raggio dell'elettrone sufficientemente grande la frequenza massima può esser resa abbastanza piccola di modo che il termine (37) può essere trascurato di fronte a quello $-(\hbar^2/2m)\Delta_X \equiv P^2/2m$. Un ragionamento di questo tipo non è per nulla soddisfacente; innanzitutto l'attribuire un raggio finito all'elettrone non è una cosa relativisticamente invariante e non può quindi essere trasportato in una teoria relativistica; in secondo luogo, come poi nello stesso lavoro F-P hanno mostrato, ammesso pure di aver scelto la frequenza massima sufficientemente bassa talchè il termine (37) possa effettivamente essere trascurato, i risultati fisici in una siffatta teoria vengono a dipendere in alcuni casi in modo critico da questa frequenza di taglio, cioè dal raggio dell'elettrone. D'altra parte all'epoca del lavoro di F-P quello ora detto era praticamente l'unico metodo per non portarsi dietro nell'hamiltoniano il suddetto termine infinito.

Alla luce di quello che abbiamo visto nella prima parte appare invece chiaro quale deve essere il ragionamento da farsi per non portarsi dietro il termine infinito. Cominciamo col notare che l'hamiltoniano (32) ha, così com'è scritto, ben poco senso ⁽¹⁸⁾ in quanto in esso figura la quantità m che non

(18) Dato che questo hamiltoniano è lo stesso che abbiamo usato nei calcoli perturbativi della parte I ci si può meravigliare che lo sottoponiamo qui a critiche, mentre l'abbiamo adoperato nella parte I. Il seguito chiarirà la relazione che intercorre tra la trattazione perturbativa della prima parte e la trattazione (che vedremo essere completamente equivalente) di questa seconda parte. Tuttavia diciamo sin d'ora che sostanzialmente la differenza tra le due trattazioni consiste in questo: mentre nei calcoli perturbativi della parte I si fa uso di un hamiltoniano scorretto in partenza e poi, a conti fatti, si rimedia a ciò con le rinormalizzazioni, qui si parte sin dal principio da un hamiltoniano corretto, o per meglio dire «rinormalizzato» in modo che la rinormalizzazione è già effettuata in partenza.

può essere identificata con la massa sperimentalmente osservata. Sino all'ordine e^2 quest'ultima sarà invece data da:

$$(22) \quad m_f = m + m_{em},$$

con m_{em} data al solito dalla (20).

È la grandezza (22) l'unica a cui possiamo attribuire un valore ben definito (quello sperimentale) e sarà quindi la grandezza (20) che dovremo cercare di far comparire fin dal principio nell'hamiltoniana (32) se vogliamo che essa abbia un qualche senso, ossia se vogliamo poi usare nelle formule che da essa otterremo il valore sperimentale della massa.

L'hamiltoniana (32) (fatte in essa le semplificazioni $\mathbf{k} = 0$, $A^2 = 0$) dovrà perciò essere riscritta:

$$(39) \quad -\frac{\hbar^2}{2m_f} \Delta_x + V(\mathbf{x}) + \frac{ie}{m_f c} \frac{\hbar}{V^{1/2}} \sum_k \frac{(\mathbf{e}_k \cdot \text{grad}_x)}{\sqrt{|k|}} (a_k + a_{-k}^*) + \\ + \frac{1}{2} \sum \hbar c |k| (a_k^* a_k + a_k a_k^*) - \frac{\hbar^2}{2m_f^2} m_{em} \Delta_x,$$

ed è importante notare che la validità dell'hamiltoniana ora scritta è probabilmente limitata all'ordine e^2 .

La grandezza γ_k che compare nella trasformazione canonica (33) andrà pure sostituita con la seguente (che differisce dalla precedente per termini del secondo ordine in e):

$$\gamma_k = \frac{2e}{m_f} \frac{1}{\hbar c |k|} \left(\frac{\pi \hbar}{c |k|} \right)^{1/2} \mathbf{e}_k,$$

di modo che, a parte termini di ordine superiore al primo in e^2 , l'hamiltoniano a cui si giunge ha la forma:

$$(41) \quad -\frac{\hbar^2}{2m_f} \Delta_x + \frac{1}{2} \sum_k \hbar c |k| (P_k^2 + Q_k^2).$$

Esso coincide con quello ottenuto semplicemente togliendo via il termine (38) dall'hamiltoniano (36) con il ragionamento di F-P; ma sono da notarsi due punti importanti: anzitutto la quantità m_f che compare in (41) può essere ragionevolmente identificata con la massa sperimentale, mentre ciò non sarebbe a rigore vero della quantità m che compare in (36*), sebbene, naturalmente, B-N, F-P la interpretassero come tale.

In secondo luogo è da rilevare che nella scrittura dell'hamiltoniano (41) ci siamo completamente disinteressati dei termini di ordine superiore al primo in e^2 . A questo proposito si presenta la questione seguente: nella deduzione dell'hamiltoniano (41) ora sviluppata siamo giunti al detto hamiltoniano (privo

di divergenze) senza aver avuto bisogno di sottrarre in modo abbastanza arbitrario il termine infinito (37); e la deduzione ora sviluppata, in quanto basata su una idea fisicamente ben fondata qual'è quella di rinormalizzazione della massa è certamente più soddisfacente del procedimento di B-N, F-P di sottrarre senz'altro il termine infinito dell'hamiltoniano (36). Tuttavia, nella deduzione ora sviluppata si sono trascurati, come si è detto, termini di ordine superiore al primo in e^2 . Se questi termini fossero stati tenuti presenti si avrebbe in luogo di (41) un hamiltoniano (chiamiamolo H_{completo}) che differisce da (41) per termini di ordine superiore. Ora è senz'altro chiaro che i due hamiltoniani (41) (o (36*)) che è identico a (41) quando non si ponga attenzione alla differenza tra m_f ed m) ed H_{completo} daranno gli stessi risultati se le formule che da essi si ottengono si sviluppano in serie di e e si trascurano termini di ordine superiore al primo in e^2 ; ma daranno i due hamiltoniani risultati concordanti anche per quanto riguarda approssimazioni superiori? O meglio ancora qual'è il significato o la validità dell'hamiltoniano (36*) per quanto riguarda approssimazioni superiori alla prima, quando si ammetta, come sembra essere necessario per l'interpretazione fisica, che l'hamiltoniano corretto sia H_{completo} ?

Non si può senza un esame approfondito rispondere a questa questione; tuttavia c'è una buona probabilità che la validità dell'hamiltoniano (36*) (o (41)) sia limitata al primo ordine in e^2 e che non abbia senso considerare ordini superiori al primo. È in questo senso dubitativo che va inteso più sopra e in tutto il seguito il termine « probabilmente » e locuzioni quali « la validità dell'hamiltoniana (36*) è limitata probabilmente alla prima approssimazione ».

Notiamo però che l'esame approfondito della questione presenta un interesse relativo in quanto, come vedremo, e come del resto è stato già visto nella prima parte, la trattazione relativistica modifica sostanzialmente le cose. Sarebbe piuttosto estremamente interessante lo studio, sulla base della teoria relativistica, mediante la teoria delle perturbazioni dell'approssimazione e^4 del problema che stiamo trattando; ciò per vedere se anche in tal caso i criteri rinormalizzativi eliminino le infinità [15].

Occorre rilevare che, secondo B-N, F-P, l'hamiltoniano (36*) doveva essere considerato come esatto a tutti gli ordini in e (naturalmente nei limiti delle approssimazioni $k = 0$, $A^2 = 0$ che lo caratterizzano) e quindi i risultati che da esso hamiltoniano si ottenevano dovevano essere considerati come esatti a tutti gli ordini in e .

Quanto ciò possa essere vero, per quanto è stato ora detto, è dubbio. I risultati del metodo di B-N hanno probabilmente perciò realmente senso soltanto quando, sviluppati che essi siano in serie di e ci si limiti alla prima approssimazione in e^2 ; ed in tal caso, come faremo vedere, i risultati del metodo di B-N, F-P coincidono con i risultati ottenuti nella prima parte, applicando la teoria delle perturbazioni fino all'ordine e^2 e rinormalizzando;

ciò è chiaro in quanto si può mostrare facilmente ⁽¹⁹⁾ che l'unica differenza tra i calcoli perturbativi svolti nella prima parte ed il metodo di B-N fino all'approssimazione e^2 è che, mentre nei calcoli della parte prima la rinormalizzazione della massa si effettuava « a conti fatti » qui viene, mediante il procedimento ora descritto, effettuata fin dall'inizio.

Esaminato dunque il significato degli hamiltoniani (36*) (o (41)) la cosa da farsi logicamente nel seguito, viste le probabili limitazioni di validità di tali hamiltoniani, sarebbe di trascurare in tutte le seguenti deduzioni termini di ordine superiore al primo in e^2 . Tale modo di procedere presenterebbe ben poco interesse in quanto, come si è detto or ora, equivarrebbe completamente ai calcoli perturbativi della parte I, a parte il fatto che colà la rinormalizzazione della massa veniva effettuata a conti fatti e qui è stata effettuata fin dall'inizio. Noi perciò, per mostrare quello che è stato il metodo di B-N e F-P, considereremo, come già questi Autori l'hamiltoniano (36*) come corretto a tutti gli ordini in e^2 e giungeremo ai risultati di B-N, F-P ⁽²⁰⁾. Solo allora (n. 10) svilupperemo questi risultati in serie di e , mostrando, per quanto riguarda il termine in e^2 , la già asserita equivalenza con i risultati della teoria delle perturbazioni nell'approssimazione e^2 .

8. - Sezione d'urto per scattering secondo Bloch-Nordsieck.

Supponiamo allora di essere in presenza del potenziale coulombiano $V(\mathbf{x})$. L'equazione di Schrödinger nelle variabili \mathbf{X} , Q_k si scrive:

$$(35^*) \quad \left\{ -\frac{\hbar^2}{2m_f} \Delta_{\mathbf{X}} + \frac{1}{2} \sum_k \left(-\frac{\partial^2}{\partial Q_k^2} + Q_k^2 \right) \hbar c |k| + V(\mathbf{X} - \hbar \sum_k \gamma_k Q_k) \right\} \times \\ \times \psi(\mathbf{X}, Q_k, t) = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}.$$

Poichè siamo ora in possesso, nel caso dell'elettrone libero, di un hamiltoniano a variabili separate, l'unica grandezza che saremo costretti, nel problema che stiamo trattando, ossia nella (35*), a riguardare, per la nostra incapacità matematica, come perturbazione, sarà la grandezza V ; ciò, in un pro-

⁽¹⁹⁾ È questa una questione di carattere generale. È infatti noto che la teoria delle perturbazioni è equivalente a compiere per passi successivi, o se vogliamo, per successive potenze di e una trasformazione unitaria che elimini l'interazione. La trasformazione di Bloch-Nordsieck è appunto una trasformazione unitaria che elimina l'interazione a tutti gli ordini in e .

⁽²⁰⁾ Anche le locuzioni che useremo non conterranno più in generale alcun riferimento al fatto, chiarito nella precedente discussione, che l'hamiltoniano (36*) dà probabilmente risultati validi solo sino all'ordine e^2 .

blema di scattering, significa adoperare, come già facemmo nella parte I, l'approssimazione di Born.

Le autofunzioni $\psi_{n_1 n_2 \dots n_k; \mathbf{P}}(\mathbf{X}, Q_k)$ e gli autovalori $E_{n_1 n_2 \dots n_k; \mathbf{P}}$ dell'hamiltoniano (41) sono rispettivamente:

$$(42) \quad \begin{cases} \psi_{n_1 n_2 \dots n_k; \mathbf{P}}(\mathbf{X}, Q_k) = \exp \left[\frac{i}{\hbar} \mathbf{P} \cdot \mathbf{X} \right] \prod_k h_{n_k}(Q_k), \\ E_{n_1 n_2 \dots n_k; \mathbf{P}} = \frac{P^2}{2m_f} + \sum_k \hbar c |k| \left(n_k + \frac{1}{2} \right), \end{cases}$$

n_1, n_2, \dots, n_k essendo un qualsiasi sistema di numeri interi, \mathbf{P} essendo il valore generico dell'impulso dell'elettrone ed $h_{n_k}(Q_k)$ essendo funzioni di Hermite soddisfacenti all'equazione:

$$(43) \quad -\frac{d^2}{dQ_k^2} h_{n_k}(Q_k) + Q_k^2 h_{n_k}(Q_k) = (2n_k + 1) h_{n_k}(Q_k).$$

È bene chiarire il significato delle autofunzioni (42).

Le (42) sono autofunzioni di ordine zero descriventi uno stato del sistema in cui l'elettrone ha impulso \mathbf{P} e si hanno n_1 quanti di energia $\hbar c |k_1|$, n_2 quanti di energia $\hbar c |k_2|$, n_k quanti $\hbar c |k|$, dove con ordine zero si è inteso ordine zero rispetto alla perturbazione V .

Esse differiscono (naturalmente) dalle autofunzioni di ordine zero dell'hamiltoniano (6) o (7) dalle quali si parte quando si fanno i conti, come nella parte I, con la teoria delle perturbazioni usuale nell'approssimazione di Born, in quanto allora ordine zero deve intendersi tanto rispetto alla perturbazione V quanto rispetto alla perturbazione (8_1) ; con la trasformazione canonica di B-N si è, per così dire già compiuto un passo.

Chiarito il significato delle autofunzioni (42), per ottenere la sezione d'urto per una transizione dell'elettrone da uno stato \mathbf{p}_0 ad uno stato \mathbf{p}_e , accompagnata dall'emissione di n_1 quanti di energia $\hbar c |k_1|$, n_2 quanti di energia $\hbar c |k_2|$, n_k quanti di energia $\hbar c |k|$ basterà sostanzialmente costruire l'elemento di matrice:

$$(47) \quad \begin{aligned} \text{Mat}_{\mathbf{p}_e, n_k; \mathbf{p}_0, 0_k} &= \int \exp \left[-\frac{i}{\hbar} \mathbf{p}_e \cdot \mathbf{X} \right] \prod_k h_{n_k}(Q_k) V(\mathbf{X} - \hbar \sum_k \boldsymbol{\gamma}_k Q_k) \times \\ &\times \exp \left[\frac{i}{\hbar} \mathbf{p}_0 \cdot \mathbf{X} \right] \prod_k h_{0_k}(Q_k) \cdot d^3 \mathbf{X} \cdot \prod_k dQ_k \equiv \\ &\equiv \int \exp \left[-\frac{i}{\hbar} \mathbf{p}_e \cdot \mathbf{x} \right] \prod_k \exp [-i \mathbf{p}_e \cdot \boldsymbol{\gamma}_k Q_k] h_{n_k}(Q_k) V(\mathbf{x}) \exp \left[\frac{i}{\hbar} \mathbf{p}_0 \cdot \mathbf{x} \right] \times \\ &\times \prod_k \exp [i \mathbf{p}_0 \cdot \boldsymbol{\gamma}_k Q_k] h_{0_k}(Q_k) d^3 \mathbf{x} \prod_k dQ_k, \end{aligned}$$

$\prod_k h_{0_k}(Q_k)$ essendo un prodotto di funzioni di Hermite caratterizzanti lo stato

iniziale (in cui si è supposto non aversi quanti, in cui cioè tutti gli n_k sono nulli).

Tenendo conto che è:

$$(48) \quad \int \exp [-i \mathbf{p}_\varepsilon \cdot \boldsymbol{\gamma}_k Q_k] h_{n_k}(Q_k) \exp [i \mathbf{p}_0 \cdot \boldsymbol{\gamma}_k Q_k] h_{0_k}(Q_k) dQ_k = \\ = \exp \left[-\frac{W_k}{2} \right] (i\sqrt{W_k})^{n_k} \frac{1}{\sqrt{n_k!}},$$

avendo posto

$$(49) \quad W_k = \frac{1}{2} [(\mathbf{p}_\varepsilon - \mathbf{p}_0) \cdot \boldsymbol{\gamma}_k]^2,$$

risulta che il modulo quadrato di siffatto elemento di matrice vale:

$$(50) \quad |\text{Mat}_{\mathbf{p}_\varepsilon n_k; \mathbf{p}_0 0_k}|^2 = \left| \int \exp \left[-\frac{i}{\hbar} (\mathbf{p}_\varepsilon - \mathbf{p}_0) \cdot \mathbf{x} \right] \frac{Ze^{2\cdot}}{r} d^3\mathbf{x} \times \right. \\ \left. \times \prod_k \exp \left[-\frac{W_k}{2} \right] (i\sqrt{W_k})^{n_k} \frac{1}{\sqrt{n_k!}} \right|^2 = \frac{Z^2 e^4 \hbar^4 \cdot 16\pi^2}{|\mathbf{p}_\varepsilon - \mathbf{p}_0|^4},$$

La sezione d'urto per il processo considerato si ottiene allora subito moltiplicando semplicemente il modulo quadrato dell'elemento di matrice testè calcolato per:

$$(51) \quad \frac{2\pi}{\hbar} \frac{m_f}{p_0} \frac{m_f p_\varepsilon d\Omega dE_{\varepsilon}}{(2\pi\hbar)^3} \delta(E_{\nu_0} - E_{\nu_\varepsilon} - \sum_k n_k \hbar c |k|),$$

ed integrando rispetto ad E_{ν_ε} . È chiaro che nel fattore (51) il fattore m_f/p_0 proviene dall'aver diviso per il numero delle particelle incidenti sull'unità di superficie nell'unità di tempo, il fattore

$$(52) \quad \frac{m_f p_\varepsilon d\Omega dE_{\varepsilon}}{(2\pi\hbar)^3},$$

dà la densità degli stati finali ed infine la $\delta(E_{\nu_0} - E_{\nu_\varepsilon} - \sum_k n_k \hbar c |k|)$ tiene conto della conservazione dell'energia. Posto:

$$(53) \quad \varepsilon \equiv \sum_k n_k \hbar c |k| = E_{\nu_0} - E_{\nu_\varepsilon} = \frac{p_0^2}{2m_f} - \frac{p_\varepsilon^2}{2m_f},$$

(ε rappresenta la perdita di energia dell'elettrone) la sezione d'urto relativa al processo in questione si scrive perciò:

$$(54) \quad d\sigma_{n_1 n_2 \dots n_k; \nu_\varepsilon, \nu_0} = \frac{2\pi}{\hbar} \frac{m_f^2}{(2\pi\hbar)^3} \frac{p_\varepsilon}{p_0} \frac{Z^2 e^4 \hbar^4 \cdot 16\pi^2}{|\mathbf{p}_\varepsilon - \mathbf{p}_0|^4} \prod_k \exp [-W_k] \frac{W_k^{n_k}}{n_k!} d\Omega.$$

Di conseguenza la sezione d'urto per scattering in $d\Omega$ associato ad una perdita di energia compresa tra ε e $\varepsilon + d\varepsilon$ si scrive:

$$(55) \quad d\sigma_{\varepsilon; p_e, p_0} = \frac{2\pi}{\hbar} \frac{m_f^2}{(2\pi\hbar)^3} \frac{p_\varepsilon}{p_0} \frac{Z^2 e^4 \hbar^4 \cdot 16\pi^2}{|p_\varepsilon - p_0|^4} \sum_{\varepsilon < \sum_k n_k \hbar c |k| < \varepsilon + d\varepsilon} \exp[-W_k] \frac{W_k}{n_k!} d\Omega.$$

Ricordiamo che l'indice ε di cui è affisso in tutte le precedenti formule l'impulso finale p_ε sta a ricordare la dipendenza di p_ε da ε attraverso la (53).

Con $\sum_{\varepsilon < \sum_k n_k \hbar c |k| < \varepsilon + d\varepsilon}$ si è indicata nella (55) una somma estesa a tutti gli n_k soddisfacenti la $\varepsilon < \sum_k n_k \hbar c |k| < \varepsilon + d\varepsilon$ ossia tali che la perdita di energia sia compresa tra ε ed $\varepsilon + d\varepsilon$; (54), (55) costituiscono le formule fondamentali del metodo di B-N, F-P.

Prima di sviluppare, coerentemente con quanto è stato detto nel numero precedente le (54), (55) in serie di e , limitandoci poi alla sola approssimazione di ordine e^2 , che è probabilmente la sola che ha senso considerare ⁽²¹⁾, vogliamo discutere un momento le (54), (55), concepite ancora come formule esatte a tutti gli ordini in e . Poichè, come è stato più volte affermato, è assai dubbio se ciò sia esatto e poichè inoltre il tener conto della teoria della relatività modifica sostanzialmente i risultati, la discussione che svolgeremo nel numero seguente ha un interesse quasi esclusivamente storico.

9. - Discussione delle formule (54) e (55).

Fissando anzitutto l'attenzione sulla (54) notiamo che essa mostra come la sezione d'urto per scattering in $d\Omega$, associato ad una emissione di un numero qualsiasi *finito* di quanti, è nulla. Infatti se soltanto un numero finito (qualsiasi) di n_k è diverso da zero l'espressione:

$$(56) \quad \prod_k \frac{W_k^{n_k}}{n_k!},$$

⁽²¹⁾ Può essere a questo punto interessante la osservazione seguente (che ci è stata comunicata dal dott. R. J. GLAUBER in un seminario da lui tenuto a Roma nell'autunno del 1950). Ci si può porre il problema di determinare il numero n_k dei quanti di frequenza k irraggiati da una *corrente assegnata*, cioè senza quantizzare il moto delle cariche come sin qui abbiamo fatto. Tale problema può essere risolto esattamente cioè a tutto gli ordini in e , e risulta che tale numero di quanti ha in ogni caso una distribuzione poissoniana analoga a quella data dalla (54) con significato di W_k alquanto più generale. Ciò mostra qual'è il vero significato della (54).

Questo punto, dimostrato da GLAUBER con un metodo alla Schwinger può essere dimostrato immediatamente partendo dalle formule di un recente lavoro di FEYNMANN (*Phys. Rev.*, 80, 440 (1950)).

è una quantità finita; d'altra parte il fattore:

$$(57) \quad \prod_k \exp [-W_k] \frac{W_k^{n_k}}{n_k!},$$

in (54) può scriversi sotto la forma:

$$(58) \quad \exp \left[- \sum_k W_k \right] \prod_k \frac{W_k^{n_k}}{n_k!},$$

ed è come si vede subito:

$$(59) \quad \exp \left[- \sum_k W_k \right] = \exp \left[- \left[\frac{2}{3\pi} \frac{e^2}{\hbar c} \frac{|\mathbf{p}_\varepsilon - \mathbf{p}_0|^2}{m_f^2 c^2} \int_0^\infty \frac{d|k|}{|k|} \right] \right] = \exp [-\infty] = 0.$$

Segue che il fattore (57), prodotto di una quantità finita per una quantità nulla, è nullo, ciò che conferma il nostro asserto.

Calcoliamo ora la sezione d'urto totale $d\sigma_{\text{tot}}$ per scattering dell'elettrone in $d\Omega$ *indipendentemente* dalla perdita di energia ε associata allo scattering. Basterà per questo evidentemente integrare la (55) a tutte le possibili perdite di energia, ossia integrare la (55) rispetto ad ε tra 0 e $p_0^2/2m_f$. È dunque:

$$(60) \quad d\sigma_{\text{tot}} = \frac{2\pi}{\hbar} \frac{m_f^2}{(2\pi\hbar)^3} \frac{Z^2 e^4 \hbar^4 \cdot 16\pi^2}{p_0} d\Omega \int_0^{p_0^2/2m_f} \frac{p_\varepsilon}{|\mathbf{p}_\varepsilon - \mathbf{p}_0|^4} \times \\ \times \sum_{\varepsilon < \sum_k n_k \hbar c |k| < \varepsilon + d\varepsilon} \prod_k \exp [-W_k] \frac{W_k^{n_k}}{n_k!}.$$

La somma che compare nella (60) può essere calcolata effettivamente; per svolgere tale calcolo B-N decisero nell'intento di semplificare le cose, di non tener conto della conservazione dell'energia, trascurando l'energia ceduta al campo di radiazione; ciò significa: 1) supporre nella (60) p_ε indipendente da ε ed eguale a p_0 ; 2) estendere l'integrazione rispetto alla perdita di energia nella (60) non fino alla massima energia cedibile $p_0^2/2m_f$ bensì fino all'infinito.

In tale approssimazione si ricava di conseguenza per $d\sigma_{\text{tot}}$:

$$(61) \quad d\sigma_{\text{tot}} = \frac{2\pi}{\hbar} \frac{m_f^2}{(2\pi\hbar)^3} \frac{Z^2 e^4 \hbar^4 \cdot 16\pi^2 d\Omega}{|\mathbf{p} - \mathbf{p}_0|^4} \sum_{\text{a tutti gli } n_k} \prod_k \exp [-W_k] \frac{W_k^{n_k}}{n_k!},$$

essendo ora \mathbf{p} in modulo eguale a \mathbf{p}_0 .

Tenuto conto che è:

$$(62) \quad \sum_{\text{a tutti gli } n_k} \prod_k \exp [-W_k] \frac{W_k^{n_k}}{n_k!} = \exp \left[- \sum_k W_k \right] \exp \left[+ \sum_k W_k \right] = 1,$$

e inoltre:

$$(63) \quad |\mathbf{p} - \mathbf{p}_0|^2 = 2p_0^2(1 - \cos \theta) = 4p_0^2 \sin^2 \frac{\theta}{2},$$

risulta infine

$$(64) \quad d\sigma_{\text{tot}} = \left(\frac{Ze^2}{2m_f v_0^2} \right)^2 \frac{d\Omega}{\sin^4 \frac{\theta}{2}}.$$

L'espressione ora ottenuta per $d\sigma_{\text{tot}}$ mostrerebbe come la sezione d'urto per deflessione in $d\Omega$ accompagnata da emissione di non importa quanti fotoni sarebbe data semplicemente dalla formula di Rutherford come se l'elettrone non irraggiasse affatto; ciò si capisce del resto in quanto si è del tutto trascurata, a partire dalla (60), la presenza del campo elettromagnetico.

Ammessa per buona la (64), dal fatto che la sezione d'urto per deflessione in $d\Omega$ associata ad emissione di un numero infinito qualsiasi di quanti è nulla, come è stato precedentemente mostrato, e che la sezione d'urto per deflessione in $d\Omega$ associata all'emissione di un numero qualsiasi di quanti è invece diversa da zero segue che il numero medio di quanti che accompagna una deflessione dell'elettrone in $d\Omega$ è infinito; infatti se questo numero medio fosse finito la sezione per deflessione in $d\Omega$ sarebbe nulla.

F-P tuttavia hanno avuto ragionevolmente da dubitare sulla correttezza del procedimento di B-N di trascurare la conservazione dell'energia; riprendendo il calcolo di B-N essi hanno mostrato come il non tener conto della conservazione dell'energia sia di fatto del tutto errato. Fermo restando il risultato che la sezione d'urto per deflessione dell'elettrone in $d\Omega$ accompagnata (tale deflessione) da emissione di un numero finito qualsiasi di quanti è nulla essi hanno mostrato come, se si tiene correttamente conto della conservazione dell'energia, *anche* la sezione d'urto per scattering in $d\Omega$ accompagnata da emissione di *non importa quanti* fotoni (purchè la conservazione dell'energia sia soddisfatta) risulta *nulla*; cioè, detto in parole povere, l'elettrone non viene mai ad essere deflesso dal campo coulombiano.

Il risultato ora enunciato è paradossale; e se si va a cercare di vedere come si possa ad esso ovviare, in qual modo cioè si possa rendere la sezione d'urto per scattering dell'elettrone in $d\Omega$ accompagnata da emissione di non importa quanti fotoni diversa da zero, (come deve naturalmente essere), si vede che l'unico modo di far questo è quello di attribuire all'elettrone un raggio finito ossia, in altre parole, di tagliare gli integrali rispetto a $|k|$ che compaiono nelle nostre formule ad una certa frequenza $|k_{\text{max}}|$. Per dare un'idea del calcolo di F-P della sezione d'urto sopradetta fatto tenendo conto della conservazione dell'energia, riscriviamo per brevità la sezione d'urto (60) sotto la

forma:

$$(60^*) \quad d\sigma_{\text{tot}} = \frac{2\pi}{\hbar} \frac{m_f^2}{(2\pi\hbar)^3} \frac{Z^2 e^4 \hbar^4 \cdot 16\pi^2}{p_0} d\Omega \int_0^{p_0^2/2m_f} \frac{p_\varepsilon}{|p_\varepsilon - p_0|^4} S(\varepsilon) d\varepsilon,$$

dove si è posto

$$(60^{**}) \quad S(\varepsilon) d\varepsilon = \sum_{\varepsilon < \sum_k n_k \hbar c |k| < \varepsilon + d\varepsilon} \prod_k \exp[-W_k].$$

Sviluppando i calcoli con F-P risulta:

$$(65) \quad S(\varepsilon) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha \exp[i\alpha\varepsilon + f(\alpha)],$$

con

$$(66) \quad f(\alpha) = \sum_k W_k (\exp[i\alpha\hbar c |k|] - 1) = \\ = \frac{2}{3\pi} \frac{e^2}{\hbar c} \frac{|p_\varepsilon - p_0|^2}{m_f^2 c^2} \int_0^\infty \frac{d|k|}{|k|} (\exp[i\alpha\hbar c |k|] - 1);$$

l'espressione (65) risulta nulla in quanto è, come si vede facilmente, $f(\alpha) = -\infty$, l'infinità proveniendo dal lato delle alte frequenze.

Segue che, per far sì che la (66) sia finita, ossia per far sì che $S(\varepsilon)$ sia diversa da zero come occorre se si vuole che la sopradetta sezione d'urto (60) non sia nulla, occorre tagliare effettivamente ad una certa $|k_{\text{max}}|$. F-P, visto che quello di tagliare ad una certa frequenza sembrava essere l'unico modo per: a) eliminare il termine infinito (37) dell'hamiltoniano (36); b) rendere finita la sezione d'urto, hanno dettagliatamente studiato quali fossero le conseguenze di un siffatto taglio e come queste conseguenze venissero a dipendere dalla frequenza di taglio. Essi però si sono dovuti render conto come i risultati stessi vengano a dipendere in *modo critico* dalla frequenza di taglio, o, se si vuole, dal raggio dell'elettrone; e questa circostanza rende tutta la trattazione testè sviluppata inutilizzabile in quanto è difficile stabilire quale debba essere la frequenza $|k_{\text{max}}|$ in questo problema.

10. - Sviluppo delle formule di B-N in serie di e . Confronto con i risultati della teoria delle perturbazioni.

Come è stato affermato più e più volte gli sviluppi del precedente numero che abbiamo riportato per completezza, hanno poco senso sostanzialmente per due ragioni: la prima è che probabilmente l'hamiltoniano di partenza (36*) vale soltanto fino all'approssimazione e^2 e non oltre; e la seconda è che anche

ammesso che esso hamiltoniano valga a tutti gli ordini in e la trattazione precedente è non relativistica, ciò che non è compatibile col fatto che negli integrali che figurano nelle formule a cui si è giunti compaiano frequenze arbitrariamente alte.

Per quanto riguarda la prima critica ha tuttavia certamente senso limitarsi a considerare la prima approssimazione (quella di ordine e^2) in uno sviluppo in serie di e^2 delle formule stabilite nei numeri precedenti. Vogliamo precisamente mostrare che i risultati di tale prima approssimazione coincidono con quelli che si sono ottenuti nel numero 5 della parte I con la trattazione perturbativa, quando questi ultimi risultati si suppongano già rinormalizzati (vedasi formula (24)).

Lo sviluppo in serie di e^2 delle formule ottenute nei numeri precedenti è stato effettuato da F-P e contemporaneamente, ed in maniera assai chiara, da WEINMANN e BRAUNBECK. Fissiamo l'attenzione sulla (60) o (60*) che dà la sezione d'urto per scattering dell'elettrone in $d\Omega$ accompagnato (tale scattering) da una cessione di energia qualsiasi, purchè energeticamente possibile. Vediamo di sviluppare la sezione d'urto in questione in serie di potenze di e^2 . Se non si compie negli integrali (o somme) rispetto a $|k|$ nella (60*) il taglio prima discusso ad una certa frequenza $|k_{\max}|$ la (60*) stessa, che abbiamo dimostrato essere in tal caso zero, non è suscettibile di essere sviluppata in serie di e^2 , in quanto tale serie viene ad avere raggio di convergenza certamente nullo, come ci renderemo conto nel seguito. Supponiamo quindi di aver fissato la frequenza di taglio $|k_{\max}|$ (in modo per ora arbitrario) e passiamo a sviluppare la (60*) in serie di potenze di e^2 . Nella (60*) e^2 compare nel fattore (61) in quanto questo contiene W_k (49) e W_k contiene e^2 (attraverso γ_k (33*)).

Scriviamo allora:

$$(67) \quad S(\varepsilon) = S(\varepsilon)_{\varepsilon=0} + \left(\frac{\partial S(\varepsilon)}{\partial e^2} \right)_{\varepsilon=0} e^2 + \dots$$

Dalla (61) si ottiene facilmente per quanto riguarda il primo termine dello sviluppo (67):

$$(67_1) \quad S(\varepsilon)_{\varepsilon=0} = \delta(\varepsilon),$$

avendo considerato il fatto che per $\varepsilon = 0$, $S(\varepsilon)$ è diverso da zero soltanto se tutti gli n_k sono nulli (ossia solamente se $\varepsilon = 0$) e che allora è $S(\varepsilon) d\varepsilon = 1$ comunque piccolo sia $d\varepsilon$.

Per il secondo termine si ha:

$$(67_2) \quad \left(\frac{\partial S(\varepsilon)}{\partial e^2} \right)_{\varepsilon=0} = \left(\frac{\partial}{\partial e^2} \sum_k \exp \left[- \sum_k W_k \right] \prod_k \frac{W_k^{n_k}}{n_k!} \right)_{\varepsilon=0} = \\ = \left(\frac{\partial}{\partial e^2} \sum_k \exp \left[- \sum_k W_k \right] \prod_k \frac{W_k^{n_k}}{n_k!} \right)_{\varepsilon=0} =$$

La quantità (67₂) ora scritta è diversa da zero in due casi:

1) se tutti gli n_k sono nulli; in tal caso essa è eguale a:

$$(67_2)_1 \quad \left(- \sum_k W \right) \delta(\varepsilon) = \left[- \frac{2}{3\pi} \frac{e^2}{\hbar c} \frac{|\mathbf{p} - \mathbf{p}_0|^2}{m_f^2 c^2} \int_0^{\hbar c |k_{\max}|} \frac{d\hbar c}{\hbar c} \frac{|k|}{|k|} \right] \delta(\varepsilon).$$

2) se non più di uno degli n_k è diverso da zero ed eguale ad 1; ne risulta il termine:

$$(67_2)_2 \quad \sum_{\substack{k \\ \varepsilon < \sum_k n_k \hbar c |k| < \varepsilon + d\varepsilon}} W_k = \frac{2}{3\pi} \frac{e^2}{\hbar c} \frac{|\mathbf{p}_k - \mathbf{p}_0|^2}{m_f^2 c^2} \frac{d\hbar c}{\hbar c} \frac{|k|}{|k|},$$

con:

$$\frac{p_k^2}{2m_f} = \frac{p_0^2}{2m_f} - \hbar c |k|.$$

Tenendo conto di (60*), (61), (67), (67₁), (67₂) lo sviluppo della (60*) fino all'ordine e^2 si scrive dunque:

$$(68) \quad d\sigma_{\text{tot}} = \left(\frac{Ze^2}{2m_f v_0^2} \right)^2 \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}} d\Omega + \frac{2}{3\pi} \frac{e^2}{\hbar c} \int_0^{p_0^2/2m_f} \mathcal{R}_{k(m=m_f)} \frac{p_k}{p_0} \frac{|\mathbf{p}_0 - \mathbf{p}_k|^2}{m_f^2 c^2} \frac{d\hbar c}{\hbar c} \frac{|k|}{|k|} - \\ - \frac{2}{3\pi} \frac{e^2}{\hbar c} \mathcal{R}_{0(m=m_f)} \frac{|\mathbf{p}_0 - \mathbf{p}|^2}{m_f^2 c^2} \int_0^{\hbar c |k_{\max}|} \frac{d\hbar c}{\hbar c} \frac{|k|}{|k|}.$$

Il primo termine della (68) è la formula di Rutherford (1) e gli altri due termini:

$$(69) \quad \frac{2}{3\pi} \frac{e^2}{\hbar c} \int_0^{p_0^2/2m_f} \mathcal{R}_{k(m=m_f)} \frac{p_k}{p_0} \frac{|\mathbf{p}_0 - \mathbf{p}_k|^2}{m_f^2 c^2} \frac{d\hbar c}{\hbar c} \frac{|k|}{|k|} - \frac{2}{3\pi} \frac{e^2}{\hbar c} \frac{|\mathbf{p}_0 - \mathbf{p}|^2}{m_f^2 c^2} \int_0^{\hbar c |k_{\max}|} \frac{d\hbar c}{\hbar c} \frac{|k|}{|k|},$$

rappresentano evidentemente le correzioni di ordine e^2 . Come si vede la (69) coincide con la (24) della parte I quando il secondo integrale nella (24) venga tagliato ad $\hbar c |k_{\max}|$. Ciò conferma quanto dicevamo più sopra; per la discussione della (69) ci si può quindi riferire senz'altro a quanto detto nella parte I.

Se si fa tendere k_{\max} all'infinito il secondo integrale in (69) diverge. Ciò mostra evidentemente che la serie (67) di cui (67₁), (67₂) rappresentano i primi due termini dello sviluppo in serie di e , non può essere convergente visto che già il secondo termine diverge. Si noti che senza uno studio dettagliato non è neppure detto che la serie da noi considerata abbia raggio di convergenza

non nullo per $\hbar c |k_{\max}|$ finito; tuttavia la cosa sembra abbastanza plausibile.

Occorre rilevare che la formula (69) che da noi è stata dedotta inizialmente con la teoria delle perturbazioni, è stata in effetti per la prima volta ricavata nel modo che abbiamo or ora visto da WEINMANN e BRAUNBECK. Ciò spiega perchè non ci si sia resi subito conto che la formula (16) della teoria delle perturbazioni non era del tutto corretta mancando in essa il termine (div.lin.); questo termine nella (69) non compare in quanto nel metodo di B-N la rinormalizzazione è stata compiuta sin dal principio.

Sussiste contro la (69) la solita obiezione che essa è non relativistica; è stato mostrato nella prima parte come il tener conto del rinculo dell'elettrone, o più coerentemente l'applicare le formule relativistiche, tolga la divergenza nella (24) e, come un calcolo relativistico dia risultati all'incirca equivalenti a quelli che si ottengono ponendo $\hbar c |k_{\max}| \leq m_e c^2$ nella (69), ossia attribuendo all'elettrone un raggio dell'ordine della sua lunghezza d'onda Compton. Si potrebbe perciò pensare che, visto che per quanto riguarda la prima approssimazione in e^2 nello sviluppo della (60), basta, per ottenere risultati in accordo con quelli cui conduce una applicazione consistente delle formule relativistiche, porre nella (69) $\hbar c |k_{\max}| \leq m_e c^2$, la stessa cosa valesse per le approssimazioni successive; ossia che la (67) quando si taglino in essa gli integrali divergenti ad energie dell'ordine di $m_e c^2$ desse risultati sostanzialmente in accordo con quelli che si potrebbero ottenere con calcoli relativistici, non soltanto per quanto riguarda il primo ordine in e^2 , ma per quanto riguarda tutti gli ordini. La cosa può anche essere vera; contro di essa sussiste però la solita critica riguardo alla probabile non validità della hamiltoniana di B-N per quanto riguarda approssimazioni superiori in e^2 ed inoltre sussiste il fatto che non è chiaro quale possa essere l'effetto del termine in A^2 , da noi trascurato in partenza, nell'hamiltoniano (32), sulle approssimazioni superiori.

Per finire dobbiamo ancora dire che, sebbene sia molto dubbio, come è stato spesso volte rilevato il significato della trasformazione canonica di B-N alle approssimazioni superiori in e ci si può tuttavia chiedere se esiste un analogo relativistico (cioè associato all'hamiltoniano (25)) della trasformazione canonica stessa. La risposta è, al momentó presente, negativa.

11. — Conferma sperimentale del criterio di rinormalizzazione: lo spostamento del livello $2^2S_{1/2}$ dell'Idrogeno.

In questo numero vogliamo, per concludere, esporre le ragioni (o per lo meno una delle ragioni) per cui in quanto precede abbiamo riposto tanta confidenza nel criterio di togliere le infinità rinormalizzando la massa; la ragione sta, oltre che nel chiaro significato fisico del procedimento, nel fatto che esso

criterio è stato sperimentalmente confermato in una questione assai analoga a quella qui trattata. Si tratta del ben noto effetto di spostamento del livello $2^2S_{1/2}$ dell'Idrogeno.

Consideriamo i livelli energetici di un atomo idrogenoide di numero atomico Z ; essi sono dati, si dice di solito, dagli autovalori E_n dell'equazione:

$$(70) \quad \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta - \frac{Ze^2}{r} \right) \psi_n = E_n \psi_n,$$

in approssimazione non relativistica.

Ciò non è del tutto vero. In effetti, quando si ha a che fare con un elettrone occorre sempre considerare anche il campo di radiazione al quale esso elettrone è accoppiato di modo che l'equazione di Schrödinger che descrive il sistema complessivo non è già la (70), ma al solito la (6) o (7) con $V(\mathbf{x}) = -Ze^2/r$.

Trascurando l'accoppiamento dell'elettrone col campo elettromagnetico (approssimazione zero) la (6) diventa separabile e si riottiene la (70) di modo che gli autovalori, ossia i livelli energetici del nostro atomo in approssimazione zero sono effettivamente gli autovalori della (70) cioè sono dati dalla solita formula di Balmer:

$$(71) \quad E_n = -\frac{Z^2 R h c}{n^2} \quad R = \text{costante di Rydberg}.$$

Ciò non è più vero se si tiene conto dell'accoppiamento tra l'elettrone ed il campo di radiazione. Proprio come nel caso dello scattering il tener conto di questo accoppiamento conduce a certe correzioni a quella che è la sezione d'urto di approssimazione zero (1), correzioni il cui studio è stato oggetto di quando precede, qui il tener conto dell'accoppiamento condurrà a certe correzioni a quelli che sono gli autovalori di approssimazione zero dati dalla (71). Il problema dello studio di tali correzioni prende il nome di problema delle correzioni radiative agli autovalori, o di problema dello «spostamento elettromagnetico dei livelli».

La ora detta correzione agli autovalori può essere calcolata a partire dall'hamiltoniano (6) in modo del tutto simile alla correzione alla sezione d'urto per scattering (facendo uso della teoria delle perturbazioni stazionaria anzichè di quella dipendente dal tempo). La correzione del primo ordine in e è naturalmente nulla; e la correzione globale W_n del secondo ordine relativa ad un livello imperturbato di energia E_n è data da:

$$(72) \quad W_n = -\left(\frac{2}{3\pi} \frac{e^2}{\hbar c} \right) \frac{1}{m^2} \int_0^\infty c\hbar |k| dk \sum_m \left| \frac{\int \psi_m^* (-i\hbar \text{grad}) \psi_n d\mathbf{x}}{E_m - E_n + c\hbar |k|} \right|^2,$$

avendo utilizzato le notazioni seguenti oltre a quelle già usate:

E_n, E_m energie di livelli imperturbati dell'atomo di idrogeno;

ψ_n, ψ_m relative autofunzioni.

La \sum_m è estesa a tutti i livelli m dell'atomo.

La (72) vale nell'approssimazione di dipolo. Come si vede la (72) diverge linearmente; si ha anche qui il risultato assai poco soddisfacente che il tener conto dell'accoppiamento col campo elettromagnetico anzichè dar luogo a correzioni piccole, come occorre aspettarsi, dà luogo a correzioni infinite. La situazione è perfettamente analoga a quella che si è presentata nel caso delle correzioni allo scattering (non considerando la complicazione aggiuntiva che in tal caso si aveva, della catastrofe infrarossa).

La divergenza è anche qui lineare come nel caso delle correzioni allo scattering, la (72) essendo l'analogo della (21). Come si può eliminare la divergenza? Se adottiamo il criterio di rinormalizzazione della massa usato nel caso delle correzioni allo scattering se cioè riscriviamo *tanto la (72) quanto la (71)* in termini non già della quantità m ma della quantità m_f , che interpretiamo come massa sperimentale:

$$m_f = m + m_{\text{em}} = m + \frac{4}{3\pi} \frac{e^2}{\hbar c} \int_0^\infty d\hbar c |k|,$$

si può vedere che la correzione si riscrive sino al secondo ordine in e :

$$(73) \quad \begin{aligned} W_n &= -\frac{2}{3\pi} \frac{e^2}{\hbar c} \frac{1}{m_f^2} \times \\ &\quad \times \int_0^\infty d\hbar c |k| \sum_m \frac{\left| \int \psi_m^* (-i\hbar \text{grad}) \psi_n d^3x \right|^2 (E_n - E_m)}{E_n - E_m + \hbar c |k|}, \end{aligned}$$

la divergenza lineare essendo scomparsa.

Nella (73) compare ancora una divergenza logaritmica, analogamente a quel che succedeva alla (21) dopo che si è rinormalizzata la massa; ma questa divergenza, in completa analogia col caso dello scattering viene a scomparire se la trattazione si svolge tenendo conto del rinculo od in maniera relativistica [18]. Anche in questo caso svolgendo la trattazione relativistica si vede che il risultato di tale trattazione è *circa* quello che si può ottenere dalla (73) semplicemente tagliando l'integrale logaritmicamente divergente a energie dell'ordine di $m_f c^2$ ⁽²²⁾ (energie alle quali, come è stato già rilevato, si può pre-

⁽²²⁾ Si tenga però presente che la cosa non è del tutto esatta, le formule che si ottengono dalla teoria relativistica essendo leggermente diverse da quelle che si ottengono semplicemente tagliando l'integrale. Noi tuttavia svolgeremo i calcoli per semplicità in tale modo.

vedere senz'altro che una trattazione non relativistica deve fallire). La rinormalizzazione della massa ha anche qui eliminato la divergenza.

Sviluppando ulteriormente i calcoli a partire dalla (73) in cui si sia tagliato l'integrale ad una energia $m_f c^2$ si vede che la correzione al livello n è data da:

$$(74) \quad W_n^{(\text{rinormalizzata})} = \frac{2}{3\pi} \frac{e^2}{\hbar c} \frac{2\pi \hbar^2 e^2}{m_f^2} \psi_n^2(0) \lg \frac{m_f c^2}{\langle E_n - E_m \rangle_{AV}},$$

dove abbiamo indicato con $\psi_n(0)$ la funzione d'onda dello stato n considerato, calcolata nell'origine delle coordinate, e l'espressione

$$\lg \frac{m_f c^2}{\langle E_n - E_m \rangle_{AV}},$$

sta a denotare una sorta di valor medio della grandezza

$$\lg \frac{m_f c^2}{|E_n - E_m|}$$

fatto su tutti i livelli m tenendo fisso n .

La (74) mostra che la correzione è nulla per livelli che non siano livelli S ⁽²³⁾ dato che funzioni d'onda relative a numeri quantici azimutali $l \neq 0$ sono nulle nell'origine. La correzione invece è diversa da zero per livelli S . Applicata al caso del livello $2^2 S_{1/2}$ la (74) dà, ad esempio:

$$(75) \quad W_{2^2 S_{1/2}} \cong 1040 \text{ megacicli};$$

il punto importante è ora quello che, al contrario di quel che succedeva nel caso delle correzioni alla sezione d'urto per scattering, i mezzi sperimentali sono qui così raffinati ⁽²³⁾ (osservazioni spettroscopiche con le micro-onde) da permettere di valutare spostamenti di livelli piccoli come quello testè detto (75).

Le esperienze di LAMB e RETHEFORD (per interpretare le quali la teoria ora detta è stata svolta e non viceversa come potrebbe sembrare dalla precedente esposizione ⁽²⁴⁾) hanno dato per lo spostamento del livello $2^2 S_{1/2}$ il valore:

$$1062 \pm 5 \text{ megacicli}.$$

Come si vede, l'accordo tra esperienza e teoria è ottimo (in un recente lavoro [20] BETHE discute più dettagliatamente questo accordo). Questo accordo, oltre a mostrare che lo spostamento del livello è correttamente interpretato come dovuto all'interazione dell'elettrone col campo di radiazione, è

⁽²³⁾ Questa conclusione per esempio non è del tutto corretta se i calcoli vengono svolti esattamente (vedasi nota ⁽²²⁾); tuttavia lo spostamento di livelli con $l \neq 0$ è assai piccolo di fronte a quello dei livelli con $l = 0$.

⁽²⁴⁾ Anzi il criterio di rinormalizzazione è stato introdotto la prima volta da BETHE proprio nel tentativo (felicitemente riuscito) di spiegare lo spostamento stesso.

una conferma fondamentale del criterio di rinormalizzazione della massa. È per questo che abbiamo in tutta la trattazione riposto tanta confidenza in tali criteri.

APPENDICE

(A₁) Deduzione della formula di Rutherford.

La sezione d'urto (2) si può ottenere facendo il modulo quadrato dell'elemento di matrice di Ze^2/r tra le spinore $u_{p_0}^* \exp[(i/\hbar)(\mathbf{p}_0 \cdot \mathbf{x})]$ e lo spinore $u_p \exp[-(i/\hbar)(\mathbf{p} \cdot \mathbf{x})]$, mediando questo modulo rispetto alle direzioni dello spin, e moltiplicando per $2\pi/\hbar$, per la densità degli strati finali e per il numero di particelle incidenti nell'unità di tempo sull'unità di superficie. Con le notazioni di HEITLER [1] è:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} SS_0 \left| \int u_{p_0}^* \exp \left[\frac{i}{\hbar} \mathbf{p}_0 \cdot \mathbf{x} \right] \frac{Ze^2}{r} u_p \exp \left[-\frac{i}{\hbar} \mathbf{p} \cdot \mathbf{x} \right] d^3\mathbf{x} \right|^2 &= \\ &= \left| \int \exp \left[\frac{i}{\hbar} \mathbf{p}_0 \cdot \mathbf{x} \right] \frac{Ze^2}{r} \exp \left[-\frac{i}{\hbar} \mathbf{p} \cdot \mathbf{x} \right] d^3\mathbf{x} \right|^2 \cdot \frac{1}{2} SS_0 |u_{p_0}^* u_p|^2 \\ &= \frac{16\pi^2 Z^2 e^4 \hbar^4}{|\mathbf{p}_0 - \mathbf{p}|^4} \left\{ \frac{c^2(\mathbf{p}_0 \cdot \mathbf{p}) + M^2 c^4 + E_{p_0}^2}{2E_{p_0}^2} \right\} = \frac{16\pi^2 Z^2 e^4 \hbar^4}{m^2 |\mathbf{v}_0 - \mathbf{v}|^2} (1 - \beta_0^2) \times \\ &\times \left(1 - \beta_0^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right); \end{aligned}$$

moltiplicando i vari fattori prima detti segue la (2).

(A₂) Deduzione della sezione d'urto per Bremsstrahlung con deflessione dell'elettrone in $d\Omega_p$.

È (v. per esempio HEITLER [1] con notazioni variate)

$$\begin{aligned} (1)_A \quad d\sigma_B(k) &= \frac{2\pi}{\hbar} p_k^2 \frac{dp_k}{dE_k} \frac{d\Omega_p k^2 d|k| d\Omega_k m}{(2\pi\hbar)^3 (2\pi)^3} \cdot \frac{e^2}{p_0} \cdot \frac{\hbar c}{m^2 c^2 2|k|} \times \\ &\times S_{\text{pol}} \left| \frac{\left(\frac{Ze^2}{r} \right)_{p_0, p_k + k\hbar}}{\hbar c |k|} \cdot (\mathbf{p}_k \cdot \mathbf{e}_k) - \frac{\left(\frac{Ze^2}{r} \right)_{p_0 - k\hbar, p}}{\hbar c |k|} (\mathbf{p}_0 \cdot \mathbf{e}_k) \right|^2, \end{aligned}$$

dove $(Ze^2/r)_{p', p''}$ indica l'elemento di matrice di Ze^2/r tra gli stati rappresentati da onde piane di impulsi \mathbf{p}' , \mathbf{p}'' e S_{pol} indica che occorre sommare rispetto alle direzioni di polarizzazione del quanto emesso. Trascurando nella (1)_A \mathbf{k}

anche di fronte a $\mathbf{p}_0 - \mathbf{p}_k$, (e razionalizzando le unità) si ha:

$$\begin{aligned} d\sigma_B(k) &= \frac{2\pi}{\hbar} \frac{p_k}{p_0} \cdot \frac{2\pi d\Omega_p d|k|}{(2\pi\hbar)^3 (2\pi)^3} \cdot \frac{4\pi e^2}{m^2 c^2} \frac{\hbar c}{2|k|} \cdot \frac{4|\mathbf{p}_0 - \mathbf{p}_k|^2}{3\hbar^2 c^2} |V_{\mathbf{p}_0, \mathbf{p}}|^2 = \\ &= \frac{2}{3\pi} \frac{e^2}{\hbar c} \frac{|\mathbf{p}_0 - \mathbf{p}_k|^2}{m^2 c^2} \frac{d\hbar c}{\hbar c} \frac{|k|}{|k|} \cdot \frac{2\pi}{\hbar} |V_{\mathbf{p}_0, \mathbf{p}}|^2 \frac{p_k}{p_0} \frac{d\Omega}{(2\pi\hbar)^3}, \end{aligned}$$

espressione che coincide con la (12).

(A₃) Deduzione della correzione radiativa alla sezione d'urto per scattering elastico.

È noto che la formula

$$(2)_A \quad P_{kl} = \sum_{1,2} \frac{P_{k1} P_{12} P_{2l}}{(E_l^{(0)} - E_1^{(0)})(E_l^{(0)} - E_2^{(0)})},$$

per il calcolo di un processo che avviene attraverso due stati intermedi 1, 2 non è corretta in vari casi e tra l'altro se fra gli stati intermedi ve ne sono alcuni in cui $E_1^{(0)}$ od $E_2^{(0)}$ sono eguali a $E_l^{(0)}$. Occorre in tal caso, per calcolare la probabilità di transizione, considerare accanto a $(2)_A$ altri termini; si tratta dei cosiddetti termini di rinormalizzazione della probabilità in quanto tengono conto del fatto che la probabilità dello stato iniziale va diminuendo col tempo.

Essi possono essere ricavati nel modo più semplice svolgendo la teoria delle perturbazioni dipendente dal tempo in una forma leggermente diversa da quella convenzionale. La funzione d'onda descrivente lo stato del sistema perturbato all'istante t può essere sviluppata anzichè in serie di autostati del sistema imperturbato a coefficienti variabili col tempo, (formula (31) pag. 88 di [1]), in serie di autostati del sistema perturbato (ossia dell'hamiltoniano esatto) a coefficienti c_n costanti.

Così:

$$\psi(t) = \sum_n c_n \psi_n \exp \left[-\frac{i}{\hbar} E_n t \right],$$

dove ψ_n sono qui le funzioni d'onda esatte appartenenti agli stati stazionari del sistema perturbato ed E_n gli autovalori esatti.

Se nell'istante $t = 0$ il sistema si trovava in uno stato imperturbato $\psi_k^{(0)}$ la sua funzione d'onda all'istante t sarà:

$$(3)_A \quad \psi(t) = \sum_n (\psi_n^* \psi_k^{(0)}) \psi_n \exp \left[-\frac{i}{\hbar} E_n t \right],$$

dove $(\psi_n^* \psi_k^{(0)})$ indica il prodotto scalare di ψ_n^* con $\psi_k^{(0)}$. L'ampiezza di transizione nello stato imperturbato $\psi_i^{(0)}$ al tempo t è dunque:

$$(4)_A \quad (\psi_i^{(0)*} \psi(t)) = \sum_n (\psi_i^{(0)*} \psi_n) (\psi_n^* \psi_k^{(0)}) \exp \left[-\frac{i}{\hbar} E_n t \right].$$

Sviluppiamo tanto ψ_n quanto E_n in serie di potenze della perturbazione:

$$(5)_A \quad \left\{ \begin{array}{l} \psi_n = \psi_n^{(0)} + \psi_n^{(1)} + \psi_n^{(2)} + \psi_n^{(3)} + \dots \\ E_n = E_n^{(0)} + E_n^{(1)} + E_n^{(2)} + E_n^{(3)} + \dots \end{array} \right.$$

e poniamo inoltre:

$$(6)_A \quad \psi_n^{(i)} = \sum a_{ns}^{(i)} \psi_s^{(0)}.$$

Gli $a_{ns}^{(i)}$ che figurano nella somma $(6)_A$ sono noti dalla teoria delle perturbazioni per gli stati stazionari; supporremo gli $a_{nn}^{(i)}$ tali che la funzione d'onda ψ_n sia normalizzata a ciascun ordine. Sostituendo $(5)_A$ $(6)_A$ nella $(4)_A$ si ha (fino al terzo ordine) eguagliando termini dello stesso ordine:

$$(7)_A \quad (\psi_i^{(0)*} \psi(t))^{(0)} = 0,$$

$$(8)_A \quad (\psi_i^{(0)*} \psi(t))^{(1)} = a_{kl}^{(1)} \exp \left[-\frac{i}{\hbar} E_k^{(0)} t \right] + a_{lk}^{(1)*} \exp \left[-\frac{i}{\hbar} E_l^{(0)} t \right],$$

$$(9)_A \quad (\psi_i^{(0)*} \psi(t))^{(2)} = a_{kl}^{(2)} \exp \left[-\frac{i}{\hbar} E_k^{(0)} t \right] + a_{lk}^{(2)*} \exp \left[-\frac{i}{\hbar} E_l^{(0)} t \right] +$$

$$- \sum_r a_{rk}^{(1)*} a_{rl}^{(1)} \exp \left[-\frac{i}{\hbar} E_r^{(0)} t \right] - it \left(a_{kl}^{(1)} \exp \left[-\frac{i}{\hbar} E_k^{(0)} t \right] E_k^{(1)} + \right.$$

$$\left. + a_{lk}^{(1)*} \exp \left[-\frac{i}{\hbar} E_l^{(0)} t \right] E_l^{(1)} \right),$$

$$(10)_A \quad (\psi_i^{(0)*} \psi(t))^{(3)} = a_{kl}^{(3)} \exp \left[-\frac{i}{\hbar} E_k^{(0)} t \right] + a_{lk}^{(3)*} \exp \left[-\frac{i}{\hbar} E_l^{(0)} t \right] -$$

$$- it \left(E_k^{(1)} a_{kl}^{(2)} \exp \left[-\frac{i}{\hbar} E_k^{(0)} t \right] + E_l^{(1)} a_{lk}^{(2)*} \exp \left[-\frac{i}{\hbar} E_l^{(0)} t \right] \right) +$$

$$+ \left(-it E_k^{(2)} - \frac{1}{2} E_k^{(1)2} t^2 \right) a_{kl}^{(1)} \exp \left[-\frac{i}{\hbar} E_k^{(0)} t \right] +$$

$$+ \left(-it E_l^{(2)} - \frac{1}{2} E_l^{(1)2} t^2 \right) a_{lk}^{(1)*} \exp \left[-\frac{i}{\hbar} E_l^{(0)} t \right].$$

Quelle ora trascritte sono dunque in generale le espressioni dell'ampiezza di transizione fino all'ordine $(0) (1) (2) (3)$ (caratterizzato dall'indice in alto a destra a primo membro delle $(7)_A$, $(8)_A$, $(9)_A$, $(10)_A$, al tempo t).

Nel caso delle correzioni radiative allo scattering elastico cui d'ora in avanti ci riferiremo, la perturbazione è: $P = -Ze^2/r + (8)_1$ quando si tratti il potenziale coulombiano nell'approssimazione di Born, e gli stati iniziale e finale, k , e, rispettivamente l , hanno autofunzioni:

$$\psi_k^{(0)} = \exp \left[\frac{i}{\hbar} \mathbf{p}_0 \cdot \mathbf{x} \right] \cdot [0 \text{ fotoni}],$$

$$\psi_l^{(0)} = \exp \left[\frac{i}{\hbar} \mathbf{p} \cdot \mathbf{x} \right] \cdot [0 \text{ fotoni}].$$

Facendo uso delle notazioni usate nel testo e trattando $-Ze^2/r$ solo fino alla prima approssimazione di Born risulta che la quantità indicata nel testo con (0) va sostanzialmente identificata con $(\psi_i^{(0)*}\psi(t))^{(1)}$ e la quantità (e^2) va identificata con $(\psi_i^{(0)*}\psi(t))^{(3)}$, mentre $(\psi_i^{(0)*}\psi(t))^{(2)}$ è nulla. Inoltre nel nostro caso l'espressione di $(\psi_i^{(0)*}\psi(t))^{(3)}$ può essere assai semplificata in virtù dell'annullarsi di parecchi termini o del fatto che essi non contribuiscono nel presente caso. Ciò è dovuto alla circostanza che la perturbazione P non ha elementi di matrice diagonali. Precisamente $(\psi_i^{(0)*}\psi(t))^{(3)}$ risulta potersi scrivere nella forma semplificata:

$$a_{kl}^{(3)} \exp \left[-\frac{i}{\hbar} E_k^{(0)} t \right] + a_{lk}^{(3)*} \exp \left[-\frac{i}{\hbar} E_l^{(0)} t \right] + \\ + a_{kk}^{(2)*} a_{kl}^{(1)} \exp \left[-\frac{i}{\hbar} E_k^{(0)} t \right] + a_{ll}^{(2)} a_{lk}^{(1)*} \exp \left[-\frac{i}{\hbar} E_l^{(0)} t \right].$$

Se si fa uso delle formule ora stabilite per calcolare quella parte di probabilità di transizione per unità di tempo che è associata ai termini $(e^2)(0)^* + (e^2)^*(0)$ risulta che è: $(e^2)(0)^* + (e^2)^*(0)$ proporzionale a:

$$|a_{kl}^{(1)}|^2 [a_{kk}^{(2)} + a_{ll}^{(2)}] + a_{kl}^{(1)} a_{kl}^{(3)*} + a_{lk}^{(1)*} a_{lk}^{(3)},$$

con

$$a_{kk}^{(2)} = a_{kk}^{(2)*} = -\frac{1}{2} \sum_n |a_{nk}^{(1)}|^2.$$

Segue:

$$(11)_A \quad (e^2)(0)^* + (e^2)^*(0) \text{ proporzionale a: } -\frac{1}{2} |a_{kl}^{(1)}|^2 \left[\sum_n \{ |a_{nk}^{(1)}|^2 + |a_{nl}^{(1)}|^2 \} \right] + \\ + a_{kl}^{(1)} a_{kl}^{(3)*} + a_{lk}^{(1)*} a_{lk}^{(3)}.$$

Le grandezze $a_{ik}^{(i)}$ sono le analoghe delle $\{\alpha^{n' i'} | k n^i\}$ di CONDON e SHORTLEY [21]. Usando le formule là date si trova nel nostro caso:

$$a_{kl}^{(1)} = -a_{lk}^{(1)} = \frac{P_{kl}}{E_l^{(0)} - E_k^{(0)}}, \\ a^{(3)} = -\frac{1}{2} \frac{P_{kl}}{E_l^{(0)} - E_k^{(0)}} \sum_n |a_{ln}^{(1)}|^2 + \sum_{n'' \neq l} \sum_{n'''} \frac{P_{kn''} P_{n'' n'''} P_{n''' l}}{(E_l^{(0)} - E_k^{(0)})(E_l^{(0)} - E_{n''}^{(0)})(E_l^{(0)} - E_{n'''}^{(0)})} - \\ - \frac{P_{kl}}{(E_k^{(0)} - E_l^{(0)})^2} \sum_n \frac{P_{ln} P_{nl}}{E_l^{(0)} - E_n^{(0)}}.$$

Sostituendo queste espressioni nella (11)_A si ha:

$$-|a_{kl}^{(1)}|^2 \left[\sum \{ |a_{nk}^{(1)}|^2 + |a_{nl}^{(1)}|^2 \} \right] + \\ + 2 \frac{P_{kl}}{(E_l^{(0)} - E_k^{(0)})^2} \sum_{n'' \neq l} \sum_{n'''} \frac{P_{kn''} P_{n'' n'''} P_{n''' l}}{(E_l^{(0)} - E_{n''}^{(0)})(E_l^{(0)} - E_{n'''}^{(0)})}.$$

Considerando quelle che nel nostro problema sono le transizioni possibili e procedendo nell'approssimazione di dipolo si ricava di qui subito la (16).

BIBLIOGRAFIA

- [1] W. HEITLER: *Quantum theory of radiation*, II ed. (Oxford, 1944).
G. WENTZEL: *Quantum theory of fields*. (New York, 1949).
- [2] A. H. BETHE: *Phys. Rev.*, **72**, 339 (1947).
- [3] J. SCHWINGER: *Phys. Rev.*, **74**, 1439 (1948); **75**, 651 (1949).
- [4] Z. Koba e S. TOMONAGA: *Progr. of Theor. Phys.*, III, 3, 290 (1948).
- [5] A. BLOCH e F. NORDSIECK: *Phys. Rev.*, **52**, 54 (1937).
- [6] M. FIERZ e W. PAULI: *Nuovo Cimento*, **15**, 167 (1938).
- [7] W. BRAUNBECK e E. WEINMANN: *Zeits. f. Phys.*, **110**, 360 (1938).
- [8] S. M. DANCOFF: *Phys. Rev.*, **55**, 959 (1939).
- [9] H. W. LEWIS: *Phys. Rev.*, **73**, 173 (1948).
- [10] S. T. EPSTEIN: *Phys. Rev.*, **73**, 177 (1948).
- [11] D. ITO, Z. Koba e S. TOMONAGA: *Progr. of Theor. Phys.*, III, 3, 276 (1948); III, 4, 325 (1948); S. ENDO, T. KINOSHITA e Z. Koba: *Progr. of Theor. Phys.*, IV, 2, 218 (1949).
- [12] H. A. BETHE e J. R. OPPENHEIMER: *Phys. Rev.*, **70**, 451 (1946).
- [13] T. A. WELTON: *Phys. Rev.*, **73**, 1271 (1948).
- [14] J. SCHWINGER: *Phys. Rev.*, **76**, 790 (1949).
- [15] F. J. DYSON: *Phys. Rev.*, **75**, 486 (1949); **75**, 1736 (1949).
- [16] F. VILLARS e W. PAULI: *Rev. Mod. Phys.*, **21**, 434 (1949).
- [17] R. P. FEYNMANN: *Phys. Rev.*, **76**, 769 (1949).
- [18] J. B. FRENCH e V. F. WEISSKOPF: *Phys. Rev.*, **75**, 1240 (1949).
- [19] W. E. LAMB JR. e R. C. RETHEFORD: *Phys. Rev.*, **72**, 241 (1947).
- [20] H. A. BETHE, L. M. BROWN e J. R. STEHN: *Phys. Rev.*, **77**, 370 (1950).
- [21] E. U. CONDON e G. H. SHORTLEY: *The Theory of Atomic Spectra* (Cambridge, 1935), pag. 34.

Meccanica, ottica geometrica e propagazione ionosferica.

D. GRAFFI

Istituto Matematico dell'Università - Bologna

(ricevuto il 23 Giugno 1951)

1. - L'analogia fra meccanica del punto materiale ed ottica geometrica è ben conosciuta e può, ovviamente, applicarsi alla propagazione delle radioonde corte nella ionosfera. Anzi, in questo caso (ove si trascuri, come spesso si fa, l'influenza, sull'indice di rifrazione, del campo magnetico terrestre e degli urti fra elettroni e molecole), l'analogia ora ricordata assume forma particolarmente semplice, sicchè, come vedremo, è possibile, in base a semplici considerazioni di meccanica, esporre in rapida sintesi i principali teoremi sulla propagazione ionosferica ⁽¹⁾.

2. - Sia ω la pulsazione dell'onda che si propaga nella ionosfera, N il numero degli elettroni (o meglio, il numero degli elettroni e degli ioni equivalenti agli elettroni) per unità di volume, in un luogo generico della ionosfera stessa. L'indice di rifrazione n della ionosfera, nello stesso luogo, si può scrivere, conforme alle nostre ipotesi:

$$(1) \quad n = \sqrt{1 - \frac{2kN}{c^2\omega^2}},$$

dove c è la velocità della luce nel vuoto, k una costante che, in unità Giorgi, vale $e^2c^2/2m\epsilon_0$ (e ed m sono, rispettivamente, la carica e la massa dell'elettrone ed ϵ_0 la costante dielettrica del vuoto ⁽²⁾).

(¹) Le prime applicazioni alla ionosfera della analogia fra meccanica ed ottica geometrica si trovano nella memoria di S. DE GROOT: *Some rescarches on the analogy of Propagation of Electromagnetic Waves and the Motion of a particle in a potential field*, in *Phil. Mag.*, **10**, 521 (1930). Si veda anche, su tale argomento: O. RYEDEBECK: *The Propagation of electromagnetic Waves in a Ionised Medium and the calculation of the Heights of the Ionised Layers of the Atmosphere*, in *Phil. Mag.*, **30**, 282 (1940).

(²) R. JOUAST: *L'ionosphère* (Paris, 1946), pag. 7. Si noti, però, che in questo libro è adottato il sistema elettromagnetico, e non il sistema Giorgi.

Consideriamo ora una particella materiale di massa unitaria e di energia totale $\mathcal{E} = c^2/2$, mobile in un campo di forze con potenziale $U = -kN/\omega^2$ (ed energia potenziale $V = kN/\omega^2$). Essa si muoverà con velocità di modulo v dato da (3):

$$(2) \quad v = \sqrt{2(\mathcal{E} - V)} = \sqrt{c^2 - \frac{2kN}{\omega^2}} = cn.$$

Per noti teoremi (4), la sua traiettoria coinciderà con un raggio luminoso in un mezzo di indice di rifrazione n , cioè con un raggio elettromagnetico nella ionosfera, purchè, ovviamente, raggio e traiettoria abbiano in comune un punto e la tangente in esso. Inoltre, poichè nella ionosfera la velocità di un gruppo d'onde di pulsazione ω vale nc (5), sussiste il teorema, per noi fondamentale: *Il moto di una particella di massa unitaria, energia $c^2/2$, in un campo di energia potenziale $V = kN/\omega^2$, è identico (a parità di condizioni iniziali) al moto, nella ionosfera, di un gruppo d'onde di pulsazione ω . Perciò, per conoscere i raggi elettromagnetici ed il moto di un gruppo di onde nella ionosfera, basta determinare il moto della particella considerata; il problema ottico è così ridotto ad un semplice problema di meccanica.*

3. - Il teorema ora enunciato ha validità generale, ma, per ottenerne conseguenze concrete, sono necessarie alcune ipotesi sulla struttura della ionosfera. Noi cominceremo col supporre la ionosfera stratificata in piani orizzontali, ovviamente paralleli alla superficie della Terra, che pure supporremo piana. Questa ipotesi, invero molto comune, è valida fino a che la propagazione si manifesta in una regione sufficientemente limitata, così da poter trascurare la influenza della curvatura terrestre. In tale ipotesi, posto un sistema di coordinate con l'origine sulla superficie della Terra e con l'asse z verticale e rivolto verso l'alto, la quantità N , e di conseguenza anche le n , V , sono funzioni soltanto di z . Anzi, la forza dovuta a questo potenziale risulta diretta secondo l'asse z e la sua intensità Z vale:

$$(3) \quad Z = -\frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{k}{\omega^2} \frac{dN}{dz}.$$

(3) Notiamo che il moto della particella viene qui trattato secondo la meccanica classica; quindi, la particella può assumere qualsiasi velocità, anche prossima a c , senza che la sua massa vari.

(4) T. LEVI-CIVITA e U. AMALDI: *Lezioni di Meccanica Razionale* (Bologna, 1927), vol. II, parte II, cap. XI, par. 18.

(5) La velocità di gruppo v_g vale, infatti: $\frac{1}{\frac{1}{c} \frac{d}{d\omega}(n\omega)} = nc$, come si è affermato

nel testo.

Per conoscere esplicitamente la legge con la quale Z dipende da z è necessario conoscere la legge con cui il numero N di elettroni per unità di volume varia al variare della quota. Ora, come l'esperienza suggerisce, è lecito ritenere (almeno agli effetti della propagazione delle radioonde) che N sia trascurabile fino ad una certa altezza h ; e che, per $z > h$, N sia invece una funzione di z dotata di massimi relativi in corrispondenza di certi valori (H_1, H_2, \dots) di z (i cosiddetti strati, indicati con E, F_1, F_2, \dots) e che tende ad annullarsi alle grandi altezze. Supporremo, dunque, che sia $N=0$ per $z < h$ e ammetteremo, per brevità di esposizione, che la funzione $N(z)$ (definita per $z \geq h$) abbia non più di due massimi. Non faremo, per ora, nessuna ulteriore ipotesi sulla funzione $N(z)$.

Dalle predette ipotesi discende subito che nella regione $z < h$ la forza Z è nulla e l'indice di rifrazione vale uno; la particella percorre, perciò, con velocità costante c una traiettoria rettilinea; in quella regione, tutti i raggi sono ovviamente rettilinei. Per $z \geq h$, invece, la forza non è, in generale, nulla; essa ha, come si è detto, direzione verticale ed è (cfr. (3)) orientata verso il basso dove N è crescente, verso l'alto dove N è decrescente.

Ciò premesso, valendoci dell'analogia meccanica, siamo in grado di stabilire le più importanti proprietà dei raggi emessi da una antenna (che in questi problemi si tratta come puntiforme) posta in un punto O , che possiamo sempre far coincidere con la origine degli assi. A tale scopo, consideriamo una particella che parta da O e la cui velocità iniziale, di modulo uguale a c , formi con la verticale un angolo θ_0 ; essa si comporta come un proiettile che, lanciato con angolo di elevazione uguale a $(\pi/2) - \theta_0$, si muove in un campo di forze verticali. La sua traiettoria sarà, anzitutto, in un piano verticale passante per O e che, per comodità, faremo coincidere con il piano xz ; inoltre, la componente secondo l'asse x della velocità della particella sarà sempre costante, perchè è nulla la componente delle forze del campo in quella direzione. Detto quindi θ l'angolo che la traiettoria della particella, o un raggio elettromagnetico, formano con la verticale (sicchè θ_0 è il valore di θ nel punto O) e ricorrendo la (2), avremo:

$$(4) \quad \frac{dx}{dt} = v \sin \theta = nc \sin \theta = c \sin \theta_0,$$

ossia:

$$(5) \quad n \sin \theta = \sin \theta_0;$$

equazione, questa, che generalizza la legge di Cartesio al caso in cui l'indice di rifrazione varia con continuità. Tornando al moto della particella, si ha

(⁶) Evidentemente, può esistere più di un punto che soddisfa a questa condizione, ma è evidente che dobbiamo qui riferirci a quello di minor quota.

per il teorema della energia:

$$(6) \quad \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = c^2 - \frac{2kN}{\omega^2} - \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = c^2 \cos^2 \theta_0 - \frac{2kN}{\omega^2}.$$

Ora, affinchè la particella ritorni al suolo, è necessario che la componente verticale della sua velocità si annulli; detto quindi N_M il valore massimo di N nella ionosfera, non tornano al suolo, anzi se ne allontanano indefinitamente, le particelle che partono da O con una inclinazione θ_0 tale che sia:

$$(7) \quad c^2 \cos^2 \theta_0 > \frac{2kN_M}{\omega^2}.$$

Il che, per la nostra analogia, equivale ad affermare che i raggi compresi nel cono di vertice O , asse verticale ed apertura θ_{0m} definita dalla relazione:

$$(8) \quad \cos \theta_{0m} = \sqrt{\frac{2kN_M}{\omega^2 c^2}},$$

attraversano la ionosfera. È ovvio, però, che, se fosse $2kN_M/\omega^2 c^2 > 1$, θ_{0m} risulterebbe immaginario e nessun raggio attraverserebbe la ionosfera.

Se è, invece:

$$(9) \quad c^2 \cos^2 \theta_0 < \frac{2kN_M}{\omega^2},$$

la dz/dt si annulla ad una altezza alla quale N vale $\omega^2 c^2 \cos^2 \theta_0 / 2k$ ⁽⁶⁾; e, se ivi si ha $dN/dz > 0$, la forza è diretta verso il basso e la particella, come è noto dalla meccanica, ritorna al suolo. Ciò significa che, se un raggio esce da O con una inclinazione soddisfacente la (9), cioè se è inizialmente esterno al cono ora definito, esso giunge fino all'altezza in cui N ha il valore sopraindicato e, se a quell'altezza è $dN/dz > 0$, il raggio ritorna al suolo. Se, invece, alla quota H^* in cui è $dz/dt = 0$, fosse anche $dN/dz = 0$, il moto della particella diverrebbe asintotico verso una retta orizzontale di quota H^* . Perciò, se la funzione $N(z)$ ammette un solo massimo e se escludiamo la presenza di flessi con tangente orizzontale nella curva $N(z)$, tutti i raggi esterni al cono già considerato, ritornano al suolo, mentre gli altri, escluso quello che tende asintoticamente alla retta $z = H^*$, attraversano la ionosfera.

Se, invece, sempre esclusa la presenza di flessi con tangente orizzontale nella curva $N(z)$, la funzione $N(z)$ ammette due massimi (cioè si hanno due strati), e di essi è maggiore quello corrispondente al maggior valore di z (strato più alto), allora si ha un raggio asintotico alla retta orizzontale di quota uguale a quella dello strato più basso, e questo raggio separa i raggi che ritor-

⁽⁶⁾ Evidentemente, può esistere più di un punto che soddisfa a questa condizione, ma è evidente che dobbiamo qui riferirci a quello di minor quota.

nano al suolo da quelli che proseguono nella ionosfera. Questi raggi possono però tornare al suolo, in quanto incontrano il secondo strato, in corrispondenza del quale la ionizzazione è maggiore che nel primo; e si ha qui un secondo raggio asintotico che separa raggi ancora che ritornano al suolo e raggi che superano la ionosfera (fig. 1). Analoghe considerazioni valgono, evidentemente, nel caso in cui i massimi della $N(z)$, ossia gli strati, siano più di due.

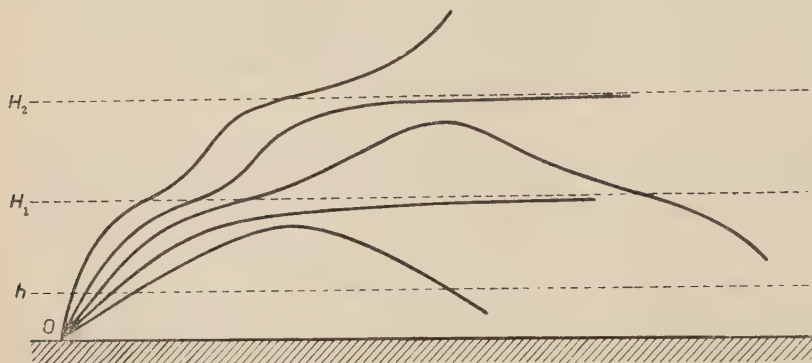


Fig. 1.

Se la curva $N(z)$ ha, per $z = H_0$, un flesso con tangente orizzontale, si avrà anche un raggio asintotico verso la retta orizzontale di quota H_0 .

Si ha poi, dalla (6), che al diminuire di θ_0 aumenta il valore di N per il quale è $dz/dt = 0$; e, per essere qui la $N(z)$ funzione crescente, aumenta il corrispondente valore di z : cioè, al diminuire della inclinazione iniziale dei raggi, aumenta la quota massima da essi raggiunta.

4. - Cerchiamo ora, sempre valendoci della analogia fra meccanica ed ottica, di prevedere, in qualche caso, la forma del raggio nella ionosfera. Naturalmente (7), occorrerà fare alcune ipotesi sulla legge secondo cui N dipende da z : Supponiamo, dapprima, che la funzione $N(z)$, identicamente nulla, come già si è detto, per $z < h$ (h è la quota alla quale ha inizio la ionosfera), sia lineare e crescente nell'intervallo $h \leq z < h_1$; la particella sarà quindi soggetta a forza nulla nella regione $z < h$, a forza costante e diretta verso il basso nella regione $h \leq z < h_1$: la sua traiettoria sarà pertanto rettilinea per $z < h$, parabolica per $h \leq z < h_1$.

Se è $\theta_0 < 45^\circ$, ipotesi, questa spesso plausibile, si ha che la gittata della nostra particella (distanza fra il punto O ed il punto in cui la particella stessa, o il raggio associato, ritornano al suolo) diminuisce al diminuire di θ_0 (infatti, diminuiscono le proiezioni orizzontali dei tratti rettilinei della traiettoria e

(7) A. HOYT TAYLOR e E. O. HULBURT: *Phys. Rev.*, **27**, 189 (1926).

diminuisce pure, come è notissimo, la proiezione orizzontale del tratto parabolico); perciò, fra tutti i raggi che, nella ionosfera, non superano la quota h_1 , ritorna al suolo a distanza minima dal punto O , il raggio che ha inclinazione iniziale minima; in altre parole, quello che raggiunge l'altezza h_1 , ritorna al suolo in un punto che ha da O distanza minore di quella analoga relativa ai raggi che raggiungono altezza massima minore di h_1 . Se supponiamo che h_1 sia molto prossimo al punto di massimo di N , possiamo ritenere che il predetto raggio con inclinazione iniziale minima sia quello che ritorna al suolo alla distanza minima da O ; ciò ha importanza nella teoria delle zone di silenzio.

Studiamo ora il caso in cui, per $h \leq z < h_1$, N cresca con legge parabolica; cioè, sia:

$$N = a(z - h)^2,$$

dove a indica una costante positiva. In questo caso, la forza agente sulla particella vale $-(ka/\omega^2)(z - h)$, cioè, è una forza verticale, proporzionale allo spostamento della particella dalla quota h ; in altre parole, è una forza di tipo elastico. La proiezione della particella sull'asse z si muove quindi di moto armonico; o, meglio, compie una semioscillazione armonica; essendo poi la coordinata x funzione lineare del tempo, si deduce che la traiettoria della particella, ossia il raggio nella ionosfera, è una semionda di sinusoide.

È bene notare, qui, che il tempo τ_1 impiegato dalla particella per percorrere questa semionda vale un mezzo periodo del moto armonico ora citato; cioè si ha $\tau_1 = \pi\omega/\sqrt{ka}$, indipendentemente dalla inclinazione iniziale θ_0 . La proiezione orizzontale di questo arco di sinusoide vale $dx/dt \cdot \tau_1 = c \sin \theta_0 \pi\omega/\sqrt{ka}$, mentre la proiezione dei due tratti rettilinei è $2h \operatorname{tg} \theta_0$; la gittata della particella vale allora:

$$(10) \quad g = c \frac{\pi\omega}{\sqrt{ka}} \sin \theta_0 + 2h \operatorname{tg} \theta_0.$$

Anche in questo caso il raggio che ritorna al suolo nel punto più vicino alla sorgente O , è quello che esce da O con la minima inclinazione rispetto alla verticale, cioè quello che raggiunge l'altezza h_1 . Notiamo, infine, che il tempo impiegato dalla particella, o da un gruppo d'onde, per percorrere la traiettoria descritta, ossia il tempo necessario per percorrere g con velocità $c \sin \theta_0$, è, per la (10) e a parità di θ_0 , una funzione lineare di ω ⁽⁸⁾. Ciò conduce ad arguire che sia effettivamente parabolica la legge di distribuzione di N con la quota z .

Dimostriamo infine il teorema di BREIT ⁽⁹⁾. Se la particella parte da O e ritorna al suolo nel tempo τ , la sua proiezione sull'asse x percorre, nello

⁽⁸⁾ I. RANZI: *Nuovo Cimento*: 10, 21 (1933), pagg. 21-36.

⁽⁹⁾ G. BREIT e M. A. TUVE: *Phys. Rev.*, 28, 554 (1926).

stesso tempo τ e con velocità $c \sin \theta_0$, la proiezione g della traiettoria sullo stesso asse. È quindi:

$$c\tau = \frac{g}{\sin \theta_0}.$$

Consideriamo ora (fig. 2) le tangenti alla traiettoria nei suoi punti estremi O , A ; esse convergono in un punto M ; posto $OM + MA = l$, si ha $OM = MA = g/2 \sin \theta_0$, quindi:

$$(11) \quad c\tau = l.$$

In base alla identità fra il moto della particella e quello di un gruppo d'onde, si deduce che quest'ultimo impiega, per salire nella ionosfera e ritornare al suolo, lo stesso tempo necessario per percorrere il cammino l con la velocità c , cioè per riflettersi su una superficie speculare orizzontale, passante per M . Si ha così il citato teorema di Breit: *L'altezza equivalente della ionosfera* (cioè l'altezza alla quale si rifletterebbe un segnale, se la iono-

sfera fosse uno specchio) è uguale alla quota del punto di intersezione delle tangenti nei punti estremi della traiettoria percorsa dal segnale. Tale altezza equivalente vale, inoltre, $(1/2)c\tau \cos \theta_0$.

5. - Confrontiamo ora la propagazione nella ionosfera, in direzione obliqua, con la propagazione in direzione verticale. Dalla (6) si deduce:

$$(12) \quad \frac{dz}{dt} = \cos \theta_0 \sqrt{c^2 - \frac{2kN}{\omega^2 \cos^2 \theta_0}} \quad (10);$$

il tempo $\tau/2$ impiegato da un gruppo d'onde per raggiungere la massima quota vale quindi:

$$(13) \quad \frac{\tau}{2} = \frac{1}{\cos \theta_0} \int_0^{z_0} \frac{dz}{\sqrt{c^2 - \frac{2kN}{\omega^2 \cos^2 \theta_0}}},$$

dove z_0 è quel valore di z per il quale N soddisfa la relazione

$$(14) \quad \frac{2kN(z_0)}{\omega^2 \cos^2 \theta_0} = c^2.$$

(10) Si assume il segno positivo per il radicale $\sqrt{c^2 - (2kN)/\omega^2 \cos^2 \theta_0}$; in quanto si considera l'intervallo in cui z è crescente.

Consideriamo ora un gruppo di onde, di pulsazione $\omega = \omega \cos \theta_0$, che si propaga in direzione verticale, cioè con $\theta_0 = 0$. Esso raggiunge l'altezza z per la quale è soddisfatta la relazione:

$$(15) \quad c^2 = \frac{2kN(z)}{\omega_1^2} = \frac{2kN(z)}{\omega^2 \cos^2 \theta_0},$$

cioè la stessa altezza z_0 . Il tempo $\tau'/2$ impiegato per salire a quella quota vale:

$$(16) \quad \frac{\tau'}{2} = \int_0^{z_0} \frac{dz}{\sqrt{c^2 - \frac{2kN}{\omega_1^2}}} = \frac{\tau}{2} \cos \theta_0.$$

Cioè, il tempo $\tau/2$ impiegato da un gruppo d'onde di pulsazione ω , avente la inclinazione iniziale θ_0 , per raggiungere la massima quota, lo si può ottenere

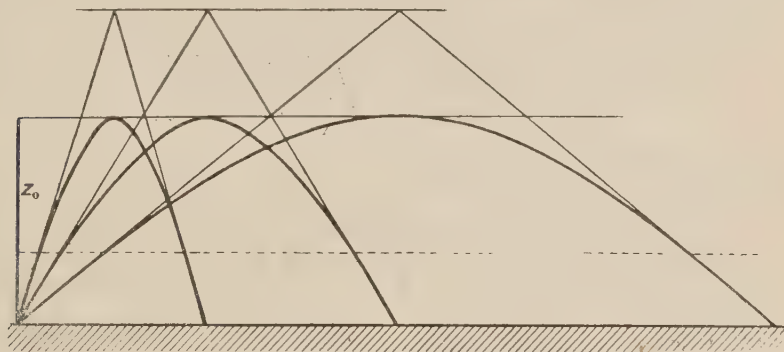


Fig. 3.

dividendo per $\cos \theta_0$ l'analogo tempo $\tau'/2$, relativo ad un gruppo d'onde di pulsazione $\omega \cos \theta_0$, propagantesi verticalmente. Si ha, inoltre, che tutti i raggi caratterizzati da valori di ω e di θ_0 soddisfacenti la $\omega \cos \theta_0 = \omega_1$, raggiungono la stessa altezza massima z_0 ; infine, tenuto conto della (16), si ha che l'altezza equivalente della ionosfera può esprimersi, conformemente al numero precedente, con $c\tau'/2$, cioè indipendentemente dalla inclinazione iniziale del raggio (fig. 3).

Consideriamo ora l'assorbimento dell'onda che si propaga in direzione obliqua, supponendo, conforme a quanto si è detto al n. 1, piccolo il numero ν degli urti. L'assorbimento per un tratto ds di traiettoria vale $(kN/\omega^2 c^3)(\nu/n) ds$ ⁽¹¹⁾;

(11) Nel citato libro del JOUAST (pag. 31) risulta che il coefficiente di assorbimento vale

$$\frac{\omega}{c} q = \frac{\sigma}{2n\epsilon_0 c}.$$

ma è

$$\frac{ds}{dt} = nc, \quad \frac{dz}{dt} = \sqrt{c^2 \cos^2 \theta_0 - \frac{2kN}{\omega^2}},$$

quindi

$$\frac{ds}{dz} = \frac{n}{\cos \theta_0 \sqrt{1 - \frac{2kN}{\omega^2 c^2 \cos^2 \theta_0}}}.$$

L'assorbimento nel tratto ds vale perciò:

$$(17) \quad \frac{kN\nu}{\omega^2 c^3 \cos \theta_0} \frac{dz}{\sqrt{1 - \frac{2kN}{\omega^2 c^2 \cos^2 \theta_0}}},$$

e quello, $\beta(\omega)$, relativo a tutto il raggio:

$$(18) \quad \beta(\omega) = 2 \int_0^{z_0} \frac{kN\nu}{\omega^2 c^3 \cos \theta_0} \cdot \frac{dz}{\sqrt{1 - \frac{2kN}{\omega^2 c^2 \cos^2 \theta_0}}};$$

od anche, ricordando che è $\omega \cos \theta_0 = \omega_1$,

$$(19) \quad \beta(\omega) = 2 \cos \theta_0 \int_0^{z_0} \frac{kN\nu}{\omega_1^2 c^3} \frac{dz}{\sqrt{1 - \frac{2kN}{c^2 \omega_1^2}}},$$

che può scriversi:

$$(20) \quad \beta(\omega) = \beta(\omega_1) \cos \theta_0,$$

avendo indicato con $\beta(\omega_1)$ l'assorbimento sulla pulsazione ω_1 , per un raggio che si propaga in direzione verticale. Noto, quindi l'assorbimento in direzione verticale di onde con pulsazione ω_1 , è possibile, mediante la (20), ricavare l'assorbimento per onde di pulsazione ω che si propagano nella direzione obliqua caratterizzata da θ_0 .

6. - Passiamo ora a considerare il caso, più aderente alla realtà, della ionosfera costituita da strati sferici concentrici alla Terra (supposta, natural-

dove σ è la conduttività (si è qui omissso il fattore 4π ed introdotto il fattore $1/\epsilon_0$; in quanto si adotta il sistema Giorgi razionalizzato). Ora, se ν^2 è trascurabile rispetto ad ω^2 , si ha

$$\sigma = \frac{2kN\epsilon_0\nu}{\omega^2 c^2}, \quad \text{onde} \quad \frac{\omega}{c} q = \frac{kN\nu}{\omega^2 c^3 n},$$

conforme al testo.

mente sferica). In questo caso, N , e di conseguenza V , dipendono soltanto dalla distanza ϱ dal centro della Terra C ; inoltre, la forza agente sulla particella è centrale (in quanto la sua linea d'azione passa sempre per il centro della Terra), il suo modulo è proporzionale a $dN/d\varrho$; essa è poi orientata verso il centro della Terra, o in verso opposto, a seconda che è positivo o negativo rispettivamente. Anche in questo caso, per noti teoremi di meccanica, la traiettoria della particella, quindi il raggio d'onda associato, giace in un piano passante per il centro della Terra e per il punto O in cui si suppone localizzata la sorgente. Fissato, allora, nel piano del raggio e con origine in C , un sistema di coordinate polari ϱ e φ , si ha subito, per il teorema del momento della quantità di moto, che è costante il prodotto di ϱ e della componente v_φ della velocità della particella lungo la normale al raggio vettore; cioè:

$$(21) \quad \varrho v_\varphi = \gamma,$$

dove γ indica una costante di cui ricaveremo fra breve il valore. Ora, se θ è l'angolo fra il raggio e la verticale e v il modulo della velocità, è, ovviamente, $v_\varphi = v \sin \theta$; per essere poi $v = nc$, si ha

$$(22) \quad nc\varrho \sin \theta = \gamma,$$

cioè il prodotto $\varrho n \sin \theta$ è costante lungo tutto il raggio. È questo il noto teorema di Bouguier.

Detto poi, al solito, θ_0 il valore di θ nel punto O , dove è anche $n = 1$, si ha, in quanto in O la quantità ϱ è uguale al raggio r della Terra, $\gamma = cr \sin \theta_0$. Perciò, nel caso in esame, si ha:

$$(23) \quad \left(\frac{d\varrho}{dt}\right)^2 + v_\varphi^2 = \left(\frac{d\varrho}{dt}\right)^2 + \frac{r^2 c^2 \sin^2 \theta_0}{\varrho^2},$$

e, applicando, come al n. 3, il teorema della energia:

$$(24) \quad \left(\frac{d\varrho}{dt}\right)^2 = c^2 - \frac{2kN}{\omega^2} - \frac{r^2 c^2 \sin^2 \theta_0}{\varrho^2} = c^2 \cos^2 \theta_0 - \frac{2kN}{\omega^2} + \frac{\varrho^2 - r^2}{\varrho^2} c^2 \sin^2 \theta_0.$$

Ora, il secondo membro di (24) differisce dall'analogo di (16) per l'aggiunta di un termine positivo. Si possono perciò ripetere le considerazioni del n. 3, e ricavare le proprietà dei raggi nelle nuove ipotesi, proprietà che risultano qualitativamente identiche a quelle dedotte nella ipotesi che la Terra e la ionosfera siano piane. In particolare, anche in questo caso, esiste un cono che separa i raggi che attraversano la ionosfera da quelli che ritornano al suolo. Questo cono è più ampio (si intende, ammessa immutata la legge con la quale N dipende dalla quota) di quello relativo al caso della ionosfera piana. È facile rendersi conto di ciò: basta osservare che la presenza, nella (24), dell'ultimo termine, essenzialmente positivo, equivale ad una diminuzione, rispetto al

caso della Terra piana (cfr. relazione (6)), della quantità N ; quindi, come si è detto, ad un aumento della apertura del cono in discorso. Con ragionamento analogo si deduce che, sempre a parità delle altre condizioni, se un raggio ritorna al suolo, la massima quota che esso ha raggiunto è maggiore della analoga relativa al caso della Terra e ionosfera piane. Del resto, questi risultati qualitativi si possono ottenere anche per altra via. Sia P la particella e si consideri il suo moto sulla retta PC . Poichè tale retta ruota attorno a C , sulla particella P agisce, oltre alla forza dovuta al potenziale V (la sola esistente nel caso della ionosfera piana), anche la forza centrifuga. Ciò equivale a diminuire la forza che richiama P al suolo; ed è perciò ovvio che la traiettoria di P (ossia il raggio associato) debba raggiungere quote a più alto valore di N , ossia quote più elevate; e che il cono dei raggi che attraversano la ionosfera sia più ampio.

7. - Aggiungiamo qualche legge quantitativa. Si abbia un raggio che ritorna al suolo; cerchiamone il raggio di curvatura R nel punto di massima quota. In questo punto, l'accelerazione della particella è tutta centripeta e vale, per la legge di Newton — $(k/\omega^2)(dN/d\rho)$; perciò, essendo nc la velocità della particella, si ha per un noto teorema:

$$(25) \quad \frac{n^2 c^2}{R} = \frac{k}{\omega^2} \frac{dN}{d\rho}.$$

D'altra parte, ricordando la (2), è:

$$(26) \quad \frac{\frac{k}{\omega^2 c^2} \frac{dN}{d\rho}}{n} = \frac{dn}{d\rho};$$

sostituendo in (25) si ricava la utile relazione ⁽¹²⁾:

$$R = -n \frac{d\rho}{dn}$$

che fornisce il raggio di curvatura nel punto più alto del raggio elettromagnetico.

In alcuni problemi ⁽¹³⁾ si suppone n variabile con ρ secondo la legge

$$(27) \quad n = \frac{s}{\rho^{p+1}},$$

dove s e p sono costanti positive. In questo caso, è facile esprimere ρ in funzione di φ : Si ha, intanto, dalla (23), che il quadrato della velocità della parti-

⁽¹²⁾ Riportata senza dimostrazione, nel citato libro del JOUAST.

⁽¹³⁾ P. LABAT: *La propagation des ondes électromagnetiques* (Paris, 1932), pag. 164.

cella vale:

$$\left(\frac{d\varrho}{dt}\right)^2 + v_p^2 = \left(\frac{d\varrho}{d\varphi}\right)^2 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + v_p^2 = \left[\frac{1}{\varrho^2} \left(\frac{d\varrho}{d\varphi}\right)^2 + 1\right] \frac{r^2 c^2 \sin^2 \theta_0}{\varrho^2};$$

e, poichè questa espressione deve valere $n^2 c^2$, si ha, ricordando la (27):

$$\varrho^{2p-2} \left(\frac{d\varrho}{d\varphi}\right)^2 + \varrho^{2p} = \frac{s^2}{r^2 \sin^2 \theta_0},$$

ossia:

$$\left(\frac{d}{d\varphi} \varrho^p\right)^2 + p^2 (\varrho^p)^2 = \frac{p^2 s^2}{r^2 \sin^2 \theta_0}.$$

Questa equazione è formalmente analoga, salvo la sostituzione della variabile φ al tempo, a quella che esprime il teorema della energia per il moto armonico, con pulsazione p^2 , di un punto di massa unitaria, coordinata ϱ^p , energia $p^2 s^2 / 2r^2 \sin^2 \theta_0$. Si ha così, detta α una costante, la relazione:

$$\varrho^p = \frac{s}{r \sin \theta_0} \sin(p\varphi + \alpha),$$

cui si perviene, di solito, con calcoli piuttosto laboriosi.

Non insistiamo su altre questioni, perchè ci sembra che gli esempi sopra esposti siano sufficienti per mostrare come la applicazione della meccanica semplifichi la teoria della propagazione ionosferica, almeno fino a che essa può svolgersi mediante l'ottica geometrica.

Osservazioni sull'equazione fondamentale dell'elettrodinamica di Tomonaga-Schwinger.

S. ALBERTONI

Istituto di Fisica dell'Università - Milano

(ricevuto il 7 Agosto 1951)

1. - Recentemente è stata data, soprattutto per opera di TOMONAGA e di SCHWINGER ⁽¹⁾, una nuova formulazione dell'elettrodinamica quantistica. Tale formulazione è stata brillantemente applicata per la spiegazione di alcuni effetti sperimentali messi in luce in questi ultimi anni, quali lo spostamento del livello $2S$ dell'atomo di Idrogeno e la correzione del momento magnetico intrinseco dell'elettrone. In questo saggio ci siamo proposti di riassumere e quando è possibile precisare, le cose principali che stanno alla base di questa nuova elettrodinamica. Il nostro scopo è essenzialmente quello di ricostruire le equazioni del moto, in forma covariante, per due sistemi dinamici interagenti, quali ad esempio potrebbero essere un campo materiale (elettroni) ed un campo di radiazione.

Siano infatti \bar{H}_1 ed \bar{H}_2 le densità di energia connesse rispettivamente col primo e col secondo campo e \bar{H}_{12} sia invece la densità d'energia di interazione fra i suddetti campi. Rappresentiamo invece con

$$(1) \quad H_1 = \int_{\tau} \bar{H}_1 d\tau; \quad H_2 = \int_{\tau} \bar{H}_2 d\tau; \quad H_{12} = \int_{\tau} \bar{H}_{12} d\tau,$$

rispettivamente l'energia totale del primo, del secondo campo e la loro energia totale di interazione; τ è la regione di spazio che interessa i campi.

Secondo l'ordinaria formulazione di Schrödinger \bar{H}_1 , \bar{H}_2 , \bar{H}_{12} e quindi anche H_1 , H_2 , H_{12} sono operatori indipendenti dal tempo i quali operano invece sulle funzioni di stato Φ_t dipendenti dal tempo. Nel seguito non faremo ipotesi

⁽¹⁾ J. SCHWINGER: *Phys. Rev.*, **74**, 1439 (1948); S. TOMONAGA: *Progr. Theor. Phys.*, **1**, 27 (1946); F. J. DYSON: *Phys. Rev.*, **75**, 486 (1949).

speciali sulla natura di tali operatori e di tali funzioni procedendo da un punto di vista formale.

L'equazione che regola la variazione nel tempo dello stato in cui si trovano i nostri due sistemi dinamici è data, in forma non covariante, dall'usuale equazione di Schrödinger:

$$(2) \quad (H_1 + H_2 + H_{12})\Phi = i\hbar \frac{\partial \Phi}{\partial t}; \quad \hbar = \frac{h}{2\pi}.$$

Si pensi ora di conoscere lo stato del sistema ad un certo istante t_0 . Questo equivale a conoscere ciò che succede su un iperpiano $t_0 = \text{costante}$ nello spazio quadridimensionale in cui si muove il punto cronotopico $P(x, y, z, t)$. Ciò che succede all'istante $t_0 + \Delta t$, cioè ciò che accade sull'iperpiano $t_0 + \Delta t = \text{cost.}$ parallelo al primo, è possibile sapersi tramite la (2) in cui $\partial/\partial t$ ha l'evidente significato di derivazione secondo la direzione individuata dall'asse dei tempi.

Usando l'equazione di Schrödinger si prendono quindi in considerazione le variazioni della funzione di stato rispetto a sezioni dello spazio-tempo del tipo $t = \text{cost.}$, cioè sezioni perpendicolari all'asse t .

Questo concetto di ortogonalità è legato al particolare sistema di riferimento, e come tale non intrinseco dal punto di vista geometrico o, ciò che è equivalente, non relativisticamente invariante.

Un altro aspetto che certo non contribuisce a rendere chiaramente in forma covariante la (2), è la presenza in essa del termine $H_1 + H_2 = H_0$. Tale termine rappresenta infatti la somma delle energie dei campi come se fossero non interagenti e quindi, al contrario di H_{12} , è ovviamente non relativisticamente invariante come si vede subito pensando al semplice caso di un elettrone in movimento che, a seconda del sistema di riferimento, può apparire in moto o in riposo.

Questo termine H_0 può essere agevolmente eliminato dalla (2) mediante la seguente trasformazione funzionale:

$$(3) \quad T = \exp \left[-\frac{i}{\hbar} H_0 t \right]; \quad T^{-1} = \exp \left[+\frac{i}{\hbar} H_0 t \right]; \quad TT^{-1} = T^{-1}T = 1,$$

la quale, agendo sull'ordinario vettore di stato Φ lo trasforma in un nuovo vettore di stato Ψ secondo la seguente formula:

$$(4) \quad \Psi = T^{-1}\Phi = \exp \left[\frac{i}{\hbar} H_0 t \right] \cdot \Phi.$$

Infatti dalla (4) si ottiene:

$$\Phi = \exp \left[-\frac{i}{\hbar} H_0 t \right] \cdot \Psi;$$

sostituendo ora tale espressione della Φ nell'equazione (2), ove scriveremo

H_{0S} e H_{12S} al posto di H_0 e di H_{12} per ricordare esplicitamente che ci riferiamo ancora ad una rappresentazione di Schrödinger, avremo:

$$H_{0S} \exp \left[-\frac{i}{\hbar} H_{0S} t \right] \cdot \Psi + H_{12S} \exp \left[-\frac{i}{\hbar} H_{0S} t \right] \cdot \Psi = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \exp \left[-\frac{i}{\hbar} H_{0S} t \right] \cdot \Psi \right\},$$

cioè

$$H_{0S} \exp \left[-\frac{i}{\hbar} H_{0S} t \right] \Psi + H_{12S} \exp \left[-\frac{i}{\hbar} H_{0S} t \right] \Psi = \\ = -i\hbar \left[-\frac{i}{\hbar} H_{0S} \exp \left[-\frac{i}{\hbar} H_{0S} t \right] \Psi + \exp \left[-\frac{i}{\hbar} H_{0S} t \right] \frac{\partial \Psi}{\partial t} \right];$$

semplificando avremo poi:

$$H_{12S} \exp \left[-\frac{i}{\hbar} H_{0S} t \right] \Psi = i\hbar \exp \left[-\frac{i}{\hbar} H_{0S} t \right] \frac{\partial \Psi}{\partial t},$$

da cui

$$(5) \quad \exp \left[+\frac{i}{\hbar} H_{0S} t \right] H_{12S} \exp \left[-\frac{i}{\hbar} H_{0S} t \right] \cdot \Psi = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t}.$$

Ora se noi oltre che trasformare il vettore di stato Φ secondo la (4), trasformiamo anche ogni generico operatore α_S della rappresentazione di Schrödinger tramite la formula seguente:

$$(6) \quad \alpha_I = T^{-1} \alpha_S T, \quad \alpha_S = T \alpha_I T^{-1},$$

in un operatore α_I , si vede subito come la (5) si può così scrivere:

$$(7) \quad H_{12I} \Psi = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t}.$$

Si è così giunti, colla (7), ad una equazione che non contiene più esplicitamente il termine H_0 ma bensì il termine H_{12I} , relativisticamente invariante in generale, ed ottenuto da H_{12} tramite la trasformazione unitaria descritta da (6).

Giunti a questo punto, esaminiamo come si presentano le equazioni di moto per gli operatori di campo α_I nella nuova rappresentazione definita dalle (4) e (6), rappresentazione che si dice di « interazione ».

Il punto sopra un generico simbolo α designando la derivazione rispetto al tempo si ha:

$$\dot{\alpha}_I = \frac{d}{dt} \alpha_I = \frac{d}{dt} (T^{-1} \alpha_S T) = \frac{dT^{-1}}{dt} \alpha_S T + T \frac{d\alpha_S}{dt} + T^{-1} \alpha_S \frac{dT}{dt},$$

ed essendo α_S indipendente dal tempo

$$\begin{aligned}\dot{\alpha}_I &= \frac{i}{\hbar} H_{0S} T^{-1} \alpha_S T - \frac{i}{\hbar} T^{-1} \alpha_S H_{0S} T = \frac{i}{\hbar} H_{0S} T^{-1} \alpha_S T - \frac{i}{\hbar} T^{-1} \alpha_S T H_{0S} = \\ &= \frac{i}{\hbar} [H_{0S} \alpha_I - \alpha_I H_{0S}] = \frac{i}{\hbar} [H_{0S}, \alpha_I].\end{aligned}$$

Indichiamo ora con α_{1I} e α_{2I} gli operatori che si riferiscono rispettivamente al primo ed al secondo campo. Poichè d'altra parte le variabili del primo campo commutano con H_{2S} e le variabili del secondo campo con H_{1S} ($H_{1S} + H_{2S} = H_{0S}$) si ha:

$$(8) \quad \alpha_{Ij} = \frac{i}{\hbar} [H_{jS}, \alpha_{Ij}], \quad (j = 1, 2).$$

Ora le (8) rappresentano proprio le equazioni del moto per le variabili dinamiche dei due sistemi quando questi non interagiscono, cioè in assenza di un fattore di concatenamento dei due campi.

Questo risultato è di grande importanza poichè noi possiamo concludere affermando che le trasformazioni funzionali (4), (6) permettono di passare da uno schema in cui gli operatori sono fissi nel tempo ed in cui le variazioni di stato sono sentite per così dire solo dalla Φ tramite l'azione di $H_{0S} + H_{12S}$, ad uno schema in cui gli operatori variano sì nel tempo, ma come se i rispettivi sistemi dinamici di cui essi ne rappresentano le variabili non si influenzassero a vicenda, ed in cui l'azione dell'interazione è sentita dalla Ψ tramite il solo termine H_{12I} , responsabile in ogni sistema di riferimento di tale accoppiamento fra i campi.

Con tutto questo la (7) non è ancora in forma covariante, perchè in essa le variazioni di stato si danno sempre in una direzione privilegiata: quella dell'asse dei tempi! Per giungere ad una formulazione covariante delle (7) si procede come risulta dal seguente numero.

2. - In tutto quanto precede si è sempre parlato di «funzione di stato all'istante t ». Ora l'essenziale proprietà della Ψ è che, dato il sistema ad un certo istante t , sono statisticamente determinati, mediante la sua conoscenza, tutti i risultati di eventuali misure eseguite sul sistema a quell'istante. Ora per poter parlare di misure eseguite in vari punti A, A', \dots ad un certo istante t occorre ammettere che la misura eseguita in A non abbia influenza alcuna sulla misura eseguita in A' e così via. Da un punto di vista relativistico questo modo di «misurare» sul sistema non è il più generale, perchè si potrebbe benissimo fare delle misure in A ed in A' a tempi diversi, purchè nell'intervallo di tempo che passa fra la misura eseguita in A e quella eseguita in A' la luce

non possa propagarsi da A in A' . Occorrerà perciò che se:

$$A \equiv A(x, y, z, t); \quad A' \equiv A'(x'y'z't'),$$

si abbia:

$$(9) \quad (x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2 > c^2(t-t')^2.$$

Di qui si vede che (sempre dal punto di vista relativistico) il più generale tipo di misurazione eseguito su un certo sistema dinamico, è quello di misurare le variabili dinamiche in punti appartenenti ad una varietà tridimensionale V_3 , immersa nello spazio S_4 , varietà caratterizzata dal seguente tipo di metrica:

$$(10) \quad ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2 > 0.$$

(La (10) deriva ovviamente da (9) scegliendo A ed A' infinitamente vicini).

Le varietà o superfici definite da (10) si dicono «superfici di genere spaziale» ed in generale indicheremo con

$$(11) \quad t = t(xyz),$$

la loro equazione cartesiana.

Riepilogando, allora, potremo dire che se noi al concetto di misure contemporanee eseguite nei vari punti $A, A'...$ di un campo, cioè nei punti del cronotopo appartenenti a iperpiani del tipo $t = \text{cost}$, sostituiamo il concetto di misure eseguite sulle varietà dianzi introdotte, otteniamo una formulazione del concetto di «misura sul sistema» che è veramente un qualche cosa di invariante, essendo la proprietà $ds^2 > 0$ una proprietà intrinseca delle superfici (11). Ora è naturale che nel vecchio caso (cioè nel caso in cui ci si ateneva al concetto di misure contemporanee eseguite nei vari punti del sistema) la funzione di stato Ψ è una funzione della t o se si vuole una funzione dei iperpiani $t = \text{cost}$. Nel nuovo schema ciò che dovrà sostituire la Ψ agli effetti di funzione di stato sarà un ente che, in quanto da esso si dovranno trarre tutte le informazioni possibili circa misure eseguite nei vari punti delle superfici (11), dovrà dipendere dall'intera forma di tali superfici che d'ora in poi chiameremo «superfici σ ».

La nuova funzione di stato sarà quindi un funzionale di σ , funzionale che indicheremo col simbolo seguente:

$$\Psi[\sigma] = \Psi[t(x, y, z)].$$

Per vedere ora quale sarà l'equazione cui dovrà soddisfare tale $\Psi[\sigma]$ e che dovrà esser tale da ridursi alla (7) nel caso in cui σ sia un iperpiano di equazione $t = \text{cost}$, ci riferiamo per semplicità, al caso unidimensionale, caso in cui Ψ sarà un funzionale di linea (linea σ a $ds^2 = dx^2 - c^2 dt^2 > 0$ e di equazione $t = t(x)$).

Cominciamo col pensare (fig. 1) la nostra linea 6, (per semplicità definita fra a e b) sostituita con una spezzata Σ inscritta nella linea stessa e di vertici $A_0(a, t(a))$, $A_1(x_1, t_1)$..., $A_n(x_n, t_n)$, $A_{n+1}(b, t(b))$. In questa approssimazione $\Psi[\sigma]$ diventa un funzionale $\Psi[\Sigma]$ di Σ e, dal momento che Σ è definita dai valori t_1, \dots, t_n potremo considerare $\Psi[\Sigma]$ come una normale funzione $\Psi(t_1, t_2, \dots, t_n)$.

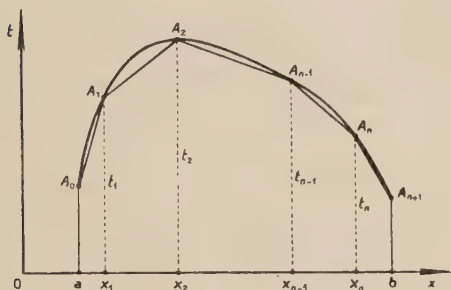


Fig. 1.

loro non interagenti poichè i punti (x_1, t_1) , (x_2, t_2) ... sono situati su di una linea di genere spaziale come è nelle ipotesi. Quindi tutto si comporta formalmente come se avessimo uno sciame di particelle, simbolizzate nei punti $(x_i, 0)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) a ciascuna delle quali è attaccato, per così dire, un tempo proprio t_i e tali da muoversi senza interagire fra di loro.

Dette $H_{x_i I}$ le loro hamiltoniane d'interazione con un campo esterno e dipendenti evidentemente da t_i , ci si può chiedere: Come si evolve la funzione di stato $\Psi(t_1, \dots, t_n)$? Si può rispondere così: la funzione $\Psi(t_1, \dots, t_n)$ obbedisce, in quanto la situazione è formalmente eguale a quella descritta dalla « Many-time theory » di Dirac, al seguente sistema di equazioni:

$$(12) \quad H_{x_i I} \cdot \Psi = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t_i}, \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Il sistema (12), ammesso che sia integrabile, è compatibile colla (7). Infatti ponendo $t_1 = t_2 = \dots = t_n = t$ (come è convenzionale nella teoria di Schrödinger) si ha che $\Psi(t_1, t_2, \dots, t_n)$ si trasforma nell'abituale funzione di stato $\Psi(t)$ della rappresentazione di Schrödinger, ed ulteriormente si ha:

$$\frac{\partial \Psi(t)}{\partial t} = \sum_i \frac{\partial \Psi(t_1, t_2, \dots, t_n)}{\partial t_i} \frac{\partial t_i}{\partial t} = \sum_i \left[\frac{\partial \Psi(t_1, \dots, t_n)}{\partial t_i} \right]_{t_1 = t_2 = \dots = t},$$

e quindi ricordando le (12) si ottiene:

$$\frac{\partial \Psi(t)}{\partial t} = \frac{1}{i\hbar} (\sum_i H_{x_i I})_{t=t_i} \Psi,$$

ed essendo $(\sum_i H_{x_i})_{t=t_i} = H_I$, ove H_I è l'energia totale d'interazione, si ha finalmente:

$$H_I \psi = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t};$$

la quale equazione è appunto la corrispondente di (7) nel caso del nostro sciaime di particelle.

Nel prossimo paragrafo ci riporteremo al caso generale in cui non si considera solo ciò che succede nei punti $(x_i, 0)$ ai tempi t_i ma bensì ciò che succede in ogni punto $(x, 0)$ (compreso fra a e b) al tempo $t(x)$.

3. - Nel numero precedente abbiamo visto che le equazioni cui soddisfa la funzione di stato approssimata $\Psi[\Sigma] = \Psi(t_1, \dots, t_n)$ sono le (12) che qui per comodità trascriviamo:

$$(12) \quad H_{x_i I} \Psi = i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t_i}, \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Il raggiungimento dello scopo annunciato alla fine del n. 2 è legato ad un passaggio nelle (12) da un numero discreto (finito) di variabili ad una infinità continua di variabili: si tratta quindi di un passaggio da un problema di analisi ordinaria (rappresentato dall'integrazione del sistema (12)) ad un problema di analisi funzionale. A tal fine è conveniente partire, invece che dalle (12), da una equazione ai differenziali totali che dalle (12) segue facilmente ricordando la definizione di differenziale totale di una funzione a più variabili. Si ha infatti:

$$(13) \quad d\Psi(t_1, t_2, \dots, t_n) = \sum_i \frac{\partial \Psi}{\partial t_i} dt_i = \sum_i \frac{1}{i\hbar} H_{x_i I} \Psi(t_1 \dots t_n) dt_i.$$

Il passaggio dal discreto al continuo lo eseguiremo appunto nella (13) piuttosto che nelle (12). In tale passaggio alla spezzata Σ corrisponde la linea σ e quindi a $\Psi(t, \dots, t_n)$ corrisponderà il funzionale di linea $\Psi[\sigma] = \Psi[t(x)]$.

Alla variabile discontinua rappresentata dall'indice i corrisponderà la variabile continua x e quindi agli incrementi dt_i corrisponderà la variazione $\delta t(x)$ della linea $t = t(x)$ definita come è d'uso nel calcolo delle variazioni, e cioè:

$$\delta t(x) = \varepsilon \theta(x),$$

ove ε fa le veci di infinitesimo principale e $\theta(x)$ è una funzione arbitraria, continua, della x . Alla $H_{x_i I}$, corrisponde invece la densità di energia d'interazione $\tilde{H}_{xI} = \tilde{H}_I(P) (P \equiv P(x, t(x)))$ e quindi alla somma

$$\frac{1}{i\hbar} \sum_i H_{x_i I} \Psi dt_i,$$

corrisponde, tenendo conto della definizione riemanniana dell'integrale, il seguente integrale definito:

$$\frac{1}{i\hbar} \int_a^b H_I(P) \Psi[\sigma] \delta t(x) dx.$$

Rimane da vedere ciò che corrisponde al differenziale $d\Psi(t_1, \dots, t_n)$. Il $d\Psi$, come è ben noto, è una funzione lineare delle variabili dt_i e, se si pone $dt_i = \varepsilon \theta_i$ considerando ε come infinitesimo principale, $\Delta\Psi - d\Psi$ è un infinitesimo di ordine superiore ad uno rispetto a ε :

$$(\Delta\Psi = \Psi(t_1 + \varepsilon \theta_1, \dots, t_n + \varepsilon \theta_n) - \Psi(t_1, \dots, t_n)).$$

Nel passaggio dal discreto al continuo $\Psi(t_1, \dots, t_n)$ diventa un funzionale $\Psi[t(x)]$, e quindi si è indotti a prendere come corrispondente del $d\Psi$ quel funzionale $\delta\Psi$ (se esiste) tale che dipenda linearmente da $\delta t(x)$ (cioè $\delta\Psi[\delta_1 t(x) + \delta_2 t(x)] = \delta\Psi[\delta_1 t(x)] + \delta\Psi[\delta_2 t(x)]$) e prendendo $\delta t(x) = \varepsilon \theta(x)$ si abbia che:

$$\Delta\Psi - d\Psi = \Psi[t(x) + \delta t(x)] - \Psi[t(x)] - \delta\Psi$$

sia un infinitesimo di ordine superiore ad uno rispetto a ε , cioè si abbia:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\Delta\Psi - \delta\Psi}{\varepsilon} = 0.$$

Tale funzionale $\delta\Psi$, esistente in generale, è quello che comunemente si dice « Differenziale di $\Psi[t(x)]$ secondo Gateaux » ⁽²⁾.

In definitiva avremo che la (13) si trasforma nella equazione seguente:

$$(14) \quad \delta\Psi[\sigma] = \frac{1}{i\hbar} \int_a^b \widetilde{H}_I(P) \Psi[\sigma] \delta t(x) dx.$$

Questa equazione alle variazioni potrebbe dunque esser presa come equazione fondamentale per la nostra teoria dei due campi interagenti, ma comunemente si presenta in una forma diversa così come venne formulata per la prima volta da TOMONAGA e da SCHWINGER (vedi loco citato ⁽¹⁾). Per arrivare a tale forma anzitutto supponiamo che le funzioni $t(x)$ siano continue e che i funzionali $\Psi[t(x)]$ possiedano la continuità di ordine zero ⁽³⁾ (ipotesi fisicamente bene accettabili) e quindi introduciamo il concetto di « derivata funzionale di un funzionale in un punto $x = \xi$ ».

⁽²⁾ V. VOLTERRA e J. PERES: *Théorie générale des Fonctionnelles* (Paris, 1936), pag. 71

⁽³⁾ Un funzionale $\Psi[t(x)]$ definito sullo spazio (\mathcal{C}) delle $t(x)$ continue su (a, b) , si dice « continuo di ordine zero » per $t = t_1(x)$ se fissato $\varepsilon > 0$ arbitrario è possibile trovare un η tale che, se $|t_2(x) - t_1(x)| < \eta$ per ogni $a < x < b$, si ha:

$$|\psi[t_2(x)] - \psi[t_1(x)]| < \varepsilon.$$

A tal fine si ricordi che si arriva alla definizione di derivata parziale di una $\Psi(t_1, \dots, t_n)$ incrementando una certa t_i di δt_i e facendo quindi il seguente:

$$\lim_{\delta t_i \rightarrow 0} \frac{\Psi(t_1, \dots, t_{i-1}, t_i + \delta t_i, t_{i+1}, \dots, t_n) - \Psi(t_1 \dots t_n)}{\delta t_i}.$$

Se si vuole arrivare alla definizione di derivata funzionale di un certo funzionale $\Psi[t(x)]$ in un punto $x = \xi$ è poco conveniente dare alla $t(x)$ un incremento solo nel punto $x = \xi$ perchè allora, a parte il fatto che si uscirebbe dallo spazio (C), la maggior parte dei funzionali (basta pensare ad un integrale secondo Lebesgue) non sentirebbero alcuna variazione variando l'argomento $t(x)$ in un insieme di misura nulla. Occorre perciò (fig. 2) dare a $t(x)$ un incremento $\delta t(x) \neq 0$ (e sempre dello stesso segno) per i soli punti di tutto un intorno $\xi - \eta \mapsto \xi + \eta$ del punto $x = \xi$ e costruire quindi il rapporto incrementale seguente:

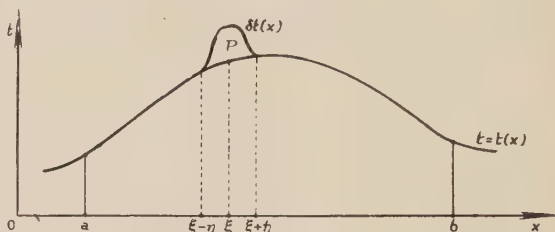


Fig. 2.

$$\frac{\Psi[t(x) + \delta t(x)] - \Psi[t(x)]}{\int_{\xi - \eta}^{\xi + \eta} \delta t(x) dx}.$$

Se esiste il limite di tale rapporto al tendere a zero simultaneamente di η e del massimo μ di $\delta t(x)$ su $\xi - \eta \mapsto \xi + \eta$, tal limite si dirà «derivata funzionale di $\Psi[t(x)]$ per $x = \xi$ e si denoterà secondo VOLTERRA ⁽⁴⁾ col simbolo:

$$\Psi'[t(x) | \xi] = \frac{d\Psi(\sigma)}{\delta\sigma(P)}.$$

Giunti a tal punto si ricordi che il differenziale di una $\Psi(t_1, \dots, t_n)$ si scrive come segue:

$$(15) \quad d\Psi = \sum_i \frac{\partial \Psi}{\partial t_i} dt_i.$$

Questa formula ci induce a pensare se non sia possibile rappresentare il $\delta\Psi$ come un integrale della derivata funzionale. Orbene VOLTERRA ⁽⁵⁾ sotto le seguenti condizioni (ben inteso non solo le più generali):

(4) V. VOLTERRA e J. PERES: loco citato, pag. 72.

(5) V. VOLTERRA e J. PERES: loco citato, pag. 73.

a) Il rapporto $\Delta\Psi/\mu\eta$ è limitato in valore assoluto

b) Il limite di $\Delta\Psi/S$; $S = \int_{\xi-\eta}^{\xi+\eta} \delta t(x) dx$ viene raggiunto uniformemente ri-

spetto a ξ ed a $t(x)$.

c) $\Psi'[t(x) | \xi]$ è continuo (di ordine zero) in modo uniforme rispetto a ξ ed a $t(x)$.

ha dimostrato che vale l'estensione di (15) al continuo e cioè che:

$$(16) \quad \delta\Psi[t(x)] = \delta\Psi[\sigma] = \int_a^b \Psi'[t(x) | \xi] \delta t(\xi) d\xi.$$

Confrontando (14) e (16) si ricava subito ciò che segue:

$$(17) \quad \widetilde{H}_I(P) \Psi[\sigma] = i\hbar \frac{\delta\Psi[\sigma]}{\delta\sigma(P)}.$$

Questa è l'equazione (estesa ovviamente al caso quadridimensionale) posta da TOMONAGA e SCHWINGER a fondamento della elettrodinamica quantistica a causa della sua forma covariante «a vista» in quanto che in essa non compaiono che elementi intrinseci a σ e l'invariante relativistico $\widetilde{H}_I(P)$.

Vogliamo ora indicare una condizione necessaria di integrabilità della (17) o della (14). Se si considera una famiglia di funzioni $t(x; \lambda)$ dipendente da un parametro λ in modo continuo e tale che $t(x, 0) = t_0(x)$, il funzionale $\Psi[t(x)]$ si riduce allora su tali funzioni ad una ordinaria $\varphi(\lambda)$ e l'equazione (14) diventa una equazione del tipo:

$$(18) \quad \frac{\partial\varphi}{\partial\lambda} = A[\varphi(\lambda)].$$

A essendo un conveniente operatore.

Noto il valore di $\Psi[t_0(x)]$, cioè il valore di $\varphi(0)$, mediante la (18) è possibile trovare una soluzione $\varphi(\lambda)$ e quindi trovare il valore di $\Psi[t(x)]$ per $t(x)$ corrispondente ad un certo valore di λ in $t(x, \lambda)$. Quindi se Ψ è noto su $t_0(x)$ e si vuole trovare il suo valore su $t_1(x)$ basterà costruire delle $t(x, \lambda)$ tali che $t(x, 0) = t_0(x)$ e $t(x, 1) = t_1(x)$ e dopo aver trovato $\varphi(\lambda)$ dalla (18) porre $\lambda = 1$ in essa. Ci si può ora domandare se il valore di $\Psi[t_1(x)]$ non dipende dalla particolare scelta della famiglia $t(x, \lambda)$ impiegata per calcolarlo. Sotto certe condizioni (criteri di integrabilità) tale fatto si verificherà qualunque sia Ψ ed allora la (14) si dirà completamente integrabile. Una condizione necessaria di integrabilità sarà trovata ⁽⁶⁾ applicando il principio del passaggio dal discreto

(6) G. WENTZEL: *Quantum theory of fields* (1949).

al continuo al sistema (12). Se tale sistema è integrabile avremo, essendo m ed n due interi compresi fra 1 ed n :

$$(19) \quad H_{x_m} \Psi = i\hbar \frac{\partial}{\partial t_m} \Psi, \quad (H_{x_m} = H_{x_m I}),$$

$$(20) \quad H_{x_n} \Psi = i\hbar \frac{\partial}{\partial t_n} \Psi.$$

Derivando (19) e (20) rispettivamente rispetto a t_n e t_m si ha:

$$\frac{\partial}{\partial t_n} H_{x_m} \Psi = i\hbar \frac{\partial^2}{\partial t_m \partial t_n} \Psi,$$

$$\frac{\partial}{\partial t_m} H_{x_n} \Psi = i\hbar \frac{\partial^2}{\partial t_m \partial t_n} \Psi,$$

onde avremo:

$$\frac{\partial}{\partial t_n} H_{x_m} \Psi = \frac{\partial}{\partial t_m} H_{x_n} \Psi,$$

ed essendo H_{x_m} indipendente dalle variabili che entrano in H_{x_n} (poichè la particella simbolizzata in $(x_m, 0)$ non interagisce con quella simbolizzata in $(x_n, 0)$) si avrà in definitiva:

$$H_{x_m} \frac{\partial \Psi}{\partial t_n} = H_{x_n} \frac{\partial \Psi}{\partial t_m},$$

e per le (12) avremo:

$$H_{x_m} H_{x_n} \Psi = H_{x_n} H_{x_m} \Psi,$$

da cui

$$H_{x_m} H_{x_n} = H_{x_n} H_{x_m}.$$

o, ciò che è equivalente,

$$[H_{x_m}, H_{x_n}] = 0.$$

Questo risultato ci dice che le hamiltoniane d'interazione delle due particelle m ed n ($m \neq n$) commutano fra loro. Passando dal discreto al continuo questo si trasforma ovviamente in:

$$(21) \quad [\tilde{H}_I(P), \tilde{H}_I(P')] = 0,$$

con P ed P' appartenenti a σ .

Alla stessa relazione si arriverebbe applicando i criteri generali (accennati a pag. 205) di integrabilità dell'equazione (16) ⁽⁷⁾ senza passare attraverso il processo di limite per cui si passa da (12) a (14). La (21) è soddisfatta per il campo elettromagnetico ⁽⁸⁾ in interazione con elettroni e non è, ad esempio, soddisfatta per la H_I del campo mesonico scalare o pseudoscalare vettoriale o pseudovettoriale col campo elettromagnetico ⁽⁹⁾.

⁽⁷⁾ P. LEVY: *Problèmes concrets d'Analyse Fonctionnelle* (Paris, 1951), pag. 96 e sg.

⁽⁸⁾ S. TOMONAGA: loco citato.

⁽⁹⁾ S. KANESAWA e S. TOMONAGA: *Prog. of Theor. Phys.*, 3, nn. 1 e 2 (1948), pag. 1.

On Giving a distinct Name to the fundamental Unit of Mass (*).

G. POLVANI

Istituto di Fisica dell'Università - Milano

(ricevuto il 25 Giugno 1951)

The problem of giving a distinct name to the fundamental unit of mass has arisen owing to the habit, which is becoming generalized, of taking as the above-mentioned unit, the mass of the International Prototype in platinum-iridium, which is kept in the Breteuil Pavillon at Sèvres.

Here, for the sake of clearness and in order to avoid long periphrases, we shall indicate with M the mass of the Prototype when it is not considered as a fundamental unit, and with M^* the same mass when it is considered as a fundamental unit.

* * *

1. - It is well known that in the C.G.S. System, where the unit of mass is the «gram», the name given to M is «kilogramme». Now, many people have proposed that M^* , that is the mass M taken up as a fundamental unit, should keep the name of «kilogramme», or, in order to show better that a unit of mass and not of force (weight) is in question, should receive the name of «kilogramme-mass».

Against this proposal it was remarked that the latter name «kilogramme-mass», triply composed, is too long and therefore unpractical to use, and both names, already containing the prefix «kilo», might give rise to misunderstanding, because this prefix is to be used, according to a universal convention, to state the multiple, after the factor 10^3 , of the fundamental unit.

Besides, both names would lead to useless reduplications of prefixes (for instance «millikilogramme», or «kilokilogramme»,...) in the indications of decimal multiples or submultiples.

(*) Paper presented to the National Commission of Metrology (for Italy) as a requested contribution to the discussion of the topic.

2. — A few people have proposed to give M^* the name of «borda».

This would be just acknowledgment and due honour to BORDA, the great French metrologist, to whom so much is due in the establishment of the Metric Decimal System ⁽¹⁾. It was however remarked that to give the name of a physicist to the fundamental unit of mass would break the habit of not calling fundamental mechanical units by persons' names and would lead to a fixed abbreviation represented by a capital letter («B»), against the use of small letters for the fundamental mechanical units, or by a small letter («b»), against the use of what happens to the units bearing persons' names.

Instead of the name of BORDA, we might also think of assuming either the names of the physicists, L. LEFÈVRE-GINAU and G. FABRONI, who concerned themselves with particularly ticklish experiments necessary for the determination and construction of the Prototype of the Archives, or even of the name of FORTIN, who built the Prototype; but these solutions also are liable to criticism concerning the abbreviation to choose for the unit.

3. — Other people, finally, have proposed that M^* should be given the name of «iners»: this denomination would recall the dynamic inertia of matter.

Against this proposal it was remarked that the substantive «inertia» would be more suitable than the adjective «iners»; that, besides, the abbreviation «i» for «iners» in the usual writing would give rise to misunderstanding with the mathematical symbol used for $\sqrt{-1}$; and that, moreover among English speaking people, the submultiple «milliners» would bring to a funny ambiguity with the common word «milliner», *i.e.* a ladies' hat-maker.

4. — I do not know whether other proposals, besides the ones above mentioned, have been presented. Anyway, the present search for a name standing for M^* shows that no proposal has enjoyed unanimous approval among those who study the denomination of fundamental units.

However, this is probably the destiny of every proposal of the kind. DELAMBRE, in relating the history, with which he was intimately connected, of the work which led to the establishment of the Metric Decimal System, textually writes about the names to give to the new units: «Cette partie qui paroîtroit la plus simple de tout le nouveau système, étoit au contraire celle qui devoit éprouver le plus de critiques» ⁽²⁾.

As usual, therefore, *nil novi*....

⁽¹⁾ About the adventurous history of this great work see J. B. DELAMBRE: *Base du Système métrique décimal*, in three volumes (Paris, 1806-1810).

⁽²⁾ J. B. DELAMBRE: *ibid.*, vol. I, page 58.

5. — Also our National Commission for Metrology has studied hard and for a long time the question of the name which should be given to M^* and, having felt the awkwardness of the present situation, has expressed many times the wish that a becoming solution of the problem may at last be found. As many members of the Commission have insistently asked me to study the problem, I accepted the kind invitation, and while thanking them, I collect and present here my opinions and proposals, without claiming that I was able to find out the best or the less worst solution of the problem committed me.

* * *

6. — Some members said that it would be convenient to invent for M^* a conventional name coming from some Greek or Latin word and meaning « matter ».

7. — It is worth remarking that, as far as I know, there is no Greek word *explicitly* meaning what this word means nowadays in Physics. I think that the ones which might somehow do are the following.

As it is known, DEMOCRITUS affirmed that the Universe consist substantially of vacuum and atoms moving in it. ARISTOTLE, in his *Physica*, reporting DEMOCRITUS' thought, writes ⁽³⁾: Πάντες δὴ τὰναντία ἀρχὰς ποιοῦσιν..., καὶ Δημόκριτος τὸ πλήρες καὶ κενόν..., that is: « Everyone assumes the opposites as principles..., and Democritus the full and the vacuum... ». DEMOCRITUS' « full » is the atoms, that is, the « matter » in the strictest qualitative sense of the word. Now, in ARISTOTLE's text, the Greek word corresponding to « full » is the neuter adjective τὸ πλήρες. From this we should derive a conventional word by which we could indicate the unit M^* : but it is clear that phonetically this derivation can hardly be carried out.

Again in his *Physica* ARISTOTLE, treating of the matter, says ⁽⁴⁾: Ἡμεῖς μὲν γὰρ ἔλην καὶ στέρησιν ἑτερόν φαμεν εἶναι, καὶ τούτων τὸ μὲν οὐκ ὄν εἶναι κατὰ συμβεβηκός, τὴν ἔλην, τὴν δὲ στέρησιν καθ' αὐτήν, καὶ τὴν μὲν ἐγγὺς καὶ οὐσίαν πως, τὴν ἔλην, τὴν δὲ στέρησιν οὐδαμῶς, that is: « In our opinion, in fact, we say that the matter and [its] lack are to distinguish, and that, of them both, the former, that is the matter, is a non-being for casuality, the latter, that is [its] lack, is a non-being in itself; the former, the matter, is close to the being, it is somehow substance; the lack is not at all substance ». The Greek word which means « matter » in this passage is ἔλη. Actually it means « wood-timber » (not yet felled), « forest » (see the Latin « silva »), then « felled timber »,

⁽³⁾ *Physica*, I, 5.

⁽⁴⁾ *Physica*, I, 9.

then «building timber», and for generalization every «building material», «material which a thing consists of», and «matter».

In modern Greek too the word «matter» is expressed by *ὕλη*.

From *ὕλη* we could therefore try to derive the conventional name to give to the fundamental unit of mass M^* ; it could be «hyle» (the «h» is imposed by the presence in Greek of the harsh spirit). As abbreviation the single «h» could not be used, for it is already used as «hora», unit of time, and it is the abbreviation everywhere used to indicate Planck's constant. We should therefore have to introduce a three-lettered abbreviation, «hyl», which is unpractical.

8. — In Latin our word «matter» is «materia, ae» or «materies, ei», both forms of a classic use, in poetry and in prose, to mean really «what the bodies consists of». So LUCRETIVS, at the beginning of the first book of *De rerum natura* ⁽⁵⁾, writes:

«.....et rerum primordia pandam,
unde omnis natura creet res, auctet alatque
quove eadem rursum natura perempta resolvat:
quae nos *materiem* et genitalia corpora rebus
reddunda in ratione vocare et semina rerum
adpellare suemus...»,

that is: «...I shall disclose the first-beginnings of things, how from these nature makes all things and increases and nourishes them, and into these the same nature again reduces them when dissolved: which in discussing philosophy we are wont to call *matter*, and bodies that generate things, and seeds of things...» ⁽⁶⁾.

It is however clear that from the word «materia» a conventional name for the unit of mass could be hardly derived and that, anyway, it could not consist of a one-lettered abbreviation, since «m» already means «meter» and the prefix «milli».

* * *

9. — The three words *πλῆρες*, *ὕλη*, «materia», which were examined in the preceding paragraphs, were chosen by us as the Greek and Latin ones which can best express the qualitative meaning of «matter» as «what bodies are made of». But instead of referring to this meaning, we could refer to the one derived from its peculiar characteristic of being heavy and inert.

From this point of view we must consider the Greek substantive *βρῆθος*, which means «load», «heaviness», «weightiness»; EURIPIDES, for instance, calls *βρῆθος*, the «cargo supported, sustained» by a ship ⁽⁷⁾. With the

⁽⁵⁾ Verse 55-60.

⁽⁶⁾ English translation by W. H. D. ROUSE (London, MCMXXIV).

⁽⁷⁾ *The Troades*, verse 1050.

word *βριθός*, are then closely connected the adjective *βριθός* and the verb *βρίθω*. The adjective *βριθός* means «heavy», «weighty»; for instance, HOMER uses it to describe the huge rod of Minerva ⁽⁸⁾. The verb *βρίθω* (intransitive) means «to be loaded, laden», «to be overburdened» (and therefore «to bend under a burden»): in this sense, for instance, it is used by HOMER for the branches «made heavy» by the fruit ⁽⁹⁾, for the trellis «laden» with cheese ⁽¹⁰⁾; by AESCHYLUS for the car-wheels «overburdened» by the load they carry ⁽¹¹⁾, and also to mean the act of «loading» the scales, which is particularly significant for our purpose:

... δαίμων τις κατέφθειρε στρατόν
τάλαντα βρίσας οὐκ ἰσορρόπῳ τύχῃ, ⁽¹²⁾

that is: «a God destroyed the army by loading the scales unfairly» (literally «with a lot not impartially equiponderant»). One must not forget also the other verb *βρίζω* which has the same root as the preceding words, and means «to procrastinate», «to be drowsy», «to be benumbed», «to be inert» ⁽¹³⁾.

Summing up, as the meanings of «heaviness» and «inertia» are essentially linked with the word *βριθός* and etymologically connected with the others mentioned above, I think it is right to propose to derive from them a standard name, for the unit M* applicable to all modern languages. It could be «brize»: it is short, with an easy pronunciation and spelling, can be easily joined to all prefixes («millibrize», «megabrize», «nanobrize»,...), and its initial letter, «b», has till now no specific meaning in Metrology.

Definitely I cannot see any objection to the adoption of the name «brize», except, perhaps, that in Italian it sounds rather funny.

10. — As to the Latin, in paragraph 3 we already had an opportunity to consider the words «iners» and «inertia». Here we can add the adjective «gravis» which is very suitable to express the «heaviness» peculiar to matter; as we shall see, it was already chosen, in its neuter form «grave», by the Academy of sciences in Paris as the name of the unit of mass. But unluckily the abbreviations «g» and «gr», which would fit it, have been in use for more than a century to indicate the «gram» and we cannot think of using them now for the word «grave».

⁽⁸⁾ *Iliad*, Book V, verse 746.

⁽⁹⁾ *Odyssey*, Book XIX, verse 112.

⁽¹⁰⁾ *Odyssey*, Book IX, verse 219.

⁽¹¹⁾ *The five in Thebes*, verse 154.

⁽¹²⁾ *The Persians*, verse 345-346.

⁽¹³⁾ See for instance *Iliad*, Book IV, verse 223.

* * *

11. — But without dwelling longer on derivations from Greek or Latin words which mean or can mean «matter» ⁽¹⁴⁾, I think that the solution of the problem which interests us could be better found by leaving the proposal of inventing a word concerning the *qualitative* conception of matter and by referring, instead, more opportunely to the *quantitative* conception: as a matter of fact, about a century and a half ago this was the way followed to introduce, even if not quite correctly, the name of «gramme» (in English «gram»).

* * *

12. — It is not out of place to remember here briefly what led to the introducing of this word to mean the fundamental unit of mass of the Metric Decimal System.

The Academy of Sciences in Paris, during the preparatory work to the great achievement of the establishment of the Metric Decimal System ⁽¹⁵⁾, since 1792 ⁽¹⁶⁾, had proposed two different simultaneous nomenclatures ⁽¹⁷⁾: in one of them the «principal» (to-day we say «fundamental») unit of mass, which was *the cubic decimeter of distilled water, at the temperature of melting ice* ⁽¹⁸⁾, was given the name of «grave», and the submultiples after the powers 10^{-1} , 10^{-2} , 10^{-3} , were given the composed names which were got by adding to the name of the principal unit the prefixes «deci», «centi», «milli»; in the other

⁽¹⁴⁾ Prof. G. FUNAIOLI points out to me the word «principium» and Prof. G. B. FIGHI «res», *σώμα, ύπόστασις*, but they all, obviously, are not apt, unluckily, to our purpose.

⁽¹⁵⁾ Besides DELAMBRE's work, already mentioned in the note ⁽¹⁾, see also the various reports included in the volumes of the *Histoire de l'Académie Royale des Sciences*, Années 1788, 1789....

⁽¹⁶⁾ With regard to the contradiction generally intercurring, as in this case, between the date of the year of an event and the one indicated in the title of the volume of the *Histoire* where the same event is mentioned (see preceding note), it is to be borne in mind that the volumes of the *Histoire*, as well as the ones of the *Mémoires*, which were published with a great delay relative to the year indicated in the title, very often collected reports of remarkable events, which had happened later than the indicated date but were to be known as soon as possible.

⁽¹⁷⁾ J. CH. BORDA, J. L. LAGRANGE and G. MONGE: *Sur le Système général des Poids et Mesures* in *Histoire de l'Académie Royale des Sciences*, Années 1789, page 1; J. B. DELAMBRE: *ibid.*, vol. I, page 58 and following.

⁽¹⁸⁾ J. CH. BORDA, J. L. LAGRANGE, P. S. LAPLACE, G. MONGE and M. J. CONDORCET: *Sur le choix d'une unité de mesure* in *Histoire de l'Académie Royale des Sciences*, Année 1788, page 11; J. CH. BORDA, J. L. LAGRANGE and G. MONGE, *ibid.*, page 12. In reference to the water taken at the utmost degree of density, see in the mentioned work of DELAMBRE, vol. III, the *Rapport* of J. G. TRALLÈS: *Sur l'unité des poids etc.* (page 558 and following) and the one of G. H. VAN SWINDEN: *Sur la mesure de la méridienne etc.* (page 592 and following, particularly from page 622 on).

nomenclature, on the contrary, the names of all these units were those, simple and independent the ones from the others, already used to indicate other traditional units.

The Metric Commission ⁽¹⁹⁾ having been then dismissed, on «le 3 nivose an 2» (23rd December 1793), with decree BARRÈRE and ROBESPIERRE, in its place a temporary Commission was appointed who proposed that some of the many units, still bound together by decimal ratios, should be indicated by simple, distinct names; others, on the contrary, by the above mentioned prefixes ⁽²⁰⁾.

Finally, on «le 18 germinal an 3» (7th April 1795), PRIEUR-DUVERNOIS presented and got the act passed, which completely changed both the unit of reference, that *now became the thousandth part of a cubic decimeter of distilled water*, and the name, which *was now fixed as «gramme»*; and while suddenly changing all other denominations, he decreed that for the multiples and sub-multiples after the powers 10^4 , 10^3 , 10^2 , 10^{-1} , 10^{-2} , 10^{-3} the prefixes «myria», «kilo», «hecto», «deca», «deci», «centi», «milli» should be used ⁽²¹⁾.

The following table, extracted from the more extensive one contained in DELAMBRE' writing ⁽²²⁾, gathers in synthesis the different denominations, we have just now recalled, for the different units of mass.

Académie des Sciences [1792]		Commission temporaire [1793]	Loi du 18 Germinal [an III, 1795]	Valeur
Millier	Millier	Bar	—	—
Quintal	—	Décibar	—	—
Décal	—	Centibar	Myriagramme	—
Livre	Grave	Grave	Kilogramme	{ Décimètre cube, d'eau distillée
Once	Décigrave	Décigrave	Hectogramme	
Drâme	Centigrave	Centigrave	Décagramme	—
Maille	Milligrave	Gravet	Gramme	—
Grain	—	Décigravet	Décigramme	—
—	—	Centigravet	Centigramme	—
—	—	Milligravet	Milligramme	—

⁽¹⁹⁾ J. B. DELAMBRE: *ibid.*, vol. I, page 59.

⁽²⁰⁾ J. B. DELAMBRE: *ibid.*, vol. I, page 58.

⁽²¹⁾ J. B. DELAMBRE: *ibid.*, vol. I, page 58-61 where you can also find an echo of the many discussions and criticisms which the choice of the prefixes «kilo» and «hecto» gave rise to, derivated from χίλιοι = «thousand» and from ἑκατόν = «hundred».

⁽²²⁾ J. B. DELAMBRE: *ibid.*, vol. I, page 59.

As you can see, while *at first*, according to the proposal of the Academy, the fundamental unit was the «grave», that is, except the inevitable errors brought by the metallic reproduction of the theoretical gauge, *it was the unit M**; *later*, suddenly, according to the act PRIEUR-DUVERNOIS, the «gramme», that is the gram, the thousandth part of M*, was taken as the fundamental unit.

13. – It is obvious that the word «gramme» comes from the Greek γράμμα, which has its root in common with γράφω «to write».

Now, originally, in the classic age of the Greek language γράμμα had the meaning of «scrawl», «mark», «letter», «engraved letter», «drawing»...; and only very late, probably with GALENUS and the other physicians of the early Roman Imperial age, it got the meaning of unit of weight, that is of *mass*, according to the usual acception given to the word *weight*.

Some people explain that the Latin word «scrupulum» (from «scrupus» = «pebble»), properly equivalent to «scruple», the name of the twenty-fourth part of an ounce, was possibly connected by confusion with «scripulum» = «line on a draughtboard» (perhaps through the equivalent form «scripulum»), and therefore with the verb «scribo» = «to write», equivalent to γράφω. Hence the word γράμμα happened to be considered as the equivalent of «scripulum» or «scrupulum» and it meant really the twenty-fourth part of an ounce ⁽²³⁾.

Other people, referring to a passage of the ancient *Carmen de ponderibus*, written by an unidentified author ⁽²⁴⁾ in the second century after Christ, affirm that the origin of the change of meaning of the word indicated in Latin as «gramma» from the original one to that of the twenty-fourth part of an ounce, comes from the analogy with the existence of twenty-four letters in the Greek alphabet and every letter, γράμμα, is therefore the twenty-fourth part of it:

«..... unde putandum
grammata dicta, quod haec viginti quattuor in se
uncia habet: tot enim formis vox nostra notatur» ⁽²⁵⁾,

that is: «... whence the grams are thought to derive: because an ounce has in itself twenty-four of them: so many forms our alphabet consists of».

Any way, it is sure that the word γράμμα, which in the centuries after Christ began meaning a particular unit of weight, and which meant later,

⁽²³⁾ A. BAILLY: *Dictionnaire Grec-Français*, 3rd edition (Paris, 1929), under the term γράμμα, ατος.

⁽²⁴⁾ F. HULTSCH: *Metrolagicorum Scriptorum Reliquiae* (Leipsic, 1864-1866), vol. II, page 24, § 118.

⁽²⁵⁾ F. HULTSCH: *ibid.*, vol. II, page 89, verse 24-27 of the *Carmen*.

in 1795, with PRIEUR-DUVERNOIS, the fundamental unit of mass in the Metric Decimal System, is *not* bound in its true etymology either to the quantitative conception of mass or to the art of weighing, and therefore, under this respect, it was not well chosen.

But notwithstanding these circumstances, the fact itself that PRIEUR-DUVERNOIS chose a word meaning a unit of weight, although out of the classic use, proves that in such a choice he wanted to refer not to qualitative conception of weight but to the quantitative one and therefore to the art of weighing. Under this respect the name of «grave» proposed by the Academy of Sciences in Paris corresponded very well to the two aspects: *qualitative* and *quantitative*, I do not know if cleverly or by a mere and lucky chance; in fact the word «grave», while expressing clearly the character of weightiness of every body, is also peculiar to the art of weighing as it is the specific adjective given to the Latin word «aes, aeris» = «copper», when this latter assumed the meaning of «coin» or, more properly, the one of «unitary weight of comparison to turn, *by using balances*, into current money the various copper coins of different weight which were contemporary current»⁽²⁶⁾. As it is known, in fact, at first the coin was *weighed* and not *numbered* by the Romans, whence the habit to deal bargains «per aes et libram».

I think, therefore, that in the problem which interests us and which is, even in the entity of the unit M* which one wants to return to nowadays, the very same that rose one hundred and sixty years ago at the time of the establishment of the Metric Decimal System, it is quite in accordance with the tradition, to invent the name of the fundamental unit of mass by deriving it from Latin and Greek words referring closely to the quantitative conception of weight and the art of weighing.

* * *

14. — Among the Greek words, *σταθμός*, is the one to be taken first into consideration, as in its deepest meaning (from *ἵστημι* = «to stand») it is equivalent to the Latin «statio», that is «place», «station», «stop», and then as the weighing is obtained when the scales stop, are still, it acquired meanings referring to the practice of weighing⁽²⁷⁾.

Like *σταθμός* also the many other words deriving from it, refer to this

⁽²⁶⁾ F. CALONGHI: *Dizionario della lingua latina* (Torino, 1950), under the term «aes, aeris». See also A. SEGRÈ: *Metrologia e circolazione monetaria degli antichi* (Bologna, 1928) page 317 and following.

⁽²⁷⁾ Likewise, as after every march there follows the «statio», that is, the «rest», the word *σταθμός* meant also one «day's walk», and then a unit of length: see *Histoire de l'Académie Royale des Sciences*, Année 1789, page 4.



Ancient Greek Weights (from SCHILLBACH)

- a) A δίμνον (= 2 mines): on the upper side appears an embossed ox head interposed between the letters of the name of the weight ^(a).
- b) A μνᾶ (= 1 mine): on the upper side appears an embossed dolphin and the name of the weight ^(b).
- c) A ἡμιμναῖον (= 1/2 mine): on the upper side appears half a dolphin and, written in the wrong order, the first five letters of the name of the weight ^(c).
- d) A ἡμιτέταρτον (= 1/8 of the unit (?)): on the upper side appears half a tortoise and the letters ΑΗΜΟ, the abbreviation of δημόσιον = «public object» ^(d).
- e) A quarter of τετηγμύσιον (= 1/12 of the unit (?)): on the upper side appears an embossed quarter of an amphora, and the letters ΗΜΣ (?) ^(e).

^(a) R. SCHILLBACH: ibidem, page 204, n^{os} 68, Table XIV, fig. 69; see also E. PERNICE: ibidem, page 166, n^o. 605.

^(b) R. SCHILLBACH: ibidem, page 196, n^o. 33, Table M, fig. 2.

^(c) R. SCHILLBACH: ibidem, page 198, n^o. 34, Table M, fig. 3.

^(d) R. SCHILLBACH: ibidem, page 200, n^o. 47, Table XIV, fig. 47.

^(e) R. SCHILLBACH: ibidem, page 198, n^o. 40, Table M, fig. 9; see also E. PERNICE: ibidem, page 11 and 95, n^o. 80.

practice: *σταθμάω* = « to weigh », « to measure », *στάθμημα* = « the act of weighing », *σταθμῖον* = « scales », « balance weight ».

All these words often recur in Greek classics. For instance *σταθμός*, with the meaning of « scales », is found in HOMER:

.... ὥς τε τάλαντα γυνή χερσὶν ἄληθής,
ἣ τε σταθμὸν ἔχουσα καὶ εἶριον ἄμφις ἀνέλκει
ἰσάζουσι...., ⁽²⁸⁾

that is:

« As when two scales are charg'd with doubtful loads,
From side to side the trembling balance nods,
(While some laborious matron, just and poor,
With nice exactness weighs her woolly store)
'Till pois'd alost, the resting beam suspends
Each equal weight; nor this, nor that, descends... » ⁽²⁹⁾;

and with the meaning of « weight » is found, for instance, in HERODOTUS: [*Κροῖσος*] ἐποίητο δὲ καὶ λέοντος εἰκόνα χρυσοῦ ἀπέφθου ἔλκουσαν σταθμὸν τάλαντα δέκα ⁽³⁰⁾, that is: « [*Croesus*] made also a pure-golden statue of a lion, having the weight of ten talents ».

Besides, when at the time of the first emperors many Greeks settled in Rome to practice medicine, and owing to them, particularly to GALENUS (who was a supporter of the unification of units), the units were established and (as we should say to-day) were standardized ⁽³¹⁾, and thus Metrology was given a strong impulse, the word *σταθμός* was used as the proper one to indicate the weight with the meaning of « quantity of matter ».

We refer those who want to go deeply into this subject to the *Metrologi-corum Scriptorum Reliquiae* of HULTSCH ⁽³²⁾, and here we mention only, as an example, the titles of two among the most ancient *Tables* of units used in Rome by the Imperial age's physicians. In them the word *σταθμός* is used with the same meaning given to-day to the word « weight » in sentences like the following: « Bureau of Weights and Measures ». The title of the most ancient table composed under the reigns of the first Roman emperors from Augustus to Claudius ⁽³³⁾, is *Περὶ μέτρων καὶ σταθμῶν, καὶ τῶν δηλούντων αὐτὰ σημάτων*, that is: « On measures and weights, and their representative symbols » ⁽³⁴⁾;

⁽²⁸⁾ *Iliad*, book XII, verse 433-435.

⁽²⁹⁾ English translation by A. POPE (London, MDCCCLX), vol. III, pag. 301-302.

⁽³⁰⁾ *Historiae*, book I, cap. 50.

⁽³¹⁾ F. HULTSCH: *ibid.*, vol. I, page 77-79, § 45.

⁽³²⁾ Mentioned work.

⁽³³⁾ F. HULTSCH: *ibid.*, vol. I, page 64-66, § 40.

⁽³⁴⁾ F. HULTSCH: *ibid.*, vol. I, page 207.

likewise CLEOPATRA's table of *Cosmetics* ⁽³⁵⁾ bears the title *Ἐκ τῶν Κλεοπάτρας Κοσμητικῶν περὶ σταθμῶν καὶ μέτρων*, that is: « On weights and measures derived from Cleopatra's *Cosmetics* » ⁽³⁶⁾.

In order to prove better the meaning of *σταθμός*, we note here that the « uncia », when used to measure the quantities of liquid, was given by GALENUS the names of « metric » and « stathmic » depending on whether the measure was in volume or in weight ⁽³⁷⁾. Likewise GALENUS writes in the first book of *Περὶ συνθέσεως φαρμάκων τῶν κατὰ γένη* these words: ... καλεῖται γὰρ ὑπὸ Ῥωμαίων, ὁμωνύμως ὁ λιτραῖος σταθμός τῶν στερεῶν σωμάτων τῷ λιτραίῳ μέτρῳ τῶν ὑγρῶν ⁽³⁸⁾, that is: « in fact by the Romans the stathmic pound for the solids is called with the same name of the metric pound for the liquids ».

We add also that all the words mentioned above have their root in common with the verb *ἵστημι*, to which also a great deal of Latin and Greek words referring to the weighing are connected: *στατήρ* = « stater », Athenian coin (we remember that the payments were performed by weighing a quantity of metal), *στατική* = « doctrine of weighing, of equilibrium », *στατικός* = « he who is experienced in weighing », « stadera » = « Roman balance ».

Finally, we shall mention that in modern Greek, « balance weight » is expressed by *σταθμός*, « to weigh » by *σταθμίζω* or *σταθμῶ*, « weighing » by *ζυγοστάθμησις* or by *ζυγοστασία* ⁽³⁹⁾, « weighing action » by *στάθμησις*, « weigher » by *σταθμιστής*.

All these references and many others which could be produced as further evidence, authorize us, perhaps, persuade us, I think, to consider the word σταθμός as particularly fit to derive from it the conventional name which must be given to the fundamental unit of mass.

In regard to its effective formation, I think that, the same as happens to the words derived from *ἐριθμός*, *ἀριθμός*, which have the literary group *θμ* as well as the word *σταθμός*, the name to give to the mentioned unit could be fixed in the following way: in English « stathm », in French « stathme », in German « Stathm », in Italian « statmo », in Spanish « statmo ».

It must be noted that the group « thm » can already be found in the common English words « rythm », « arithmetic », in the French ones « rythme », « arithmétique », in the German ones « Rhythmus », « Arithmetik » and that,

⁽³⁵⁾ F. HULTSCH: *ibid.*, vol. I, page 108-109, § 64.

⁽³⁶⁾ F. HULTSCH; *ibid.*, vol. I, page 233.

⁽³⁷⁾ F. HULTSCH: *ibid.*, vol. I, page 80. On the subject see also the other work of F. HULTSCH: *Griechische und Römische Metrologie*, 1st edit. (Berlin, 1862), page 93-94, 2nd edit. (Berlin, 1882), page 111, 120.

⁽³⁸⁾ C. G. KÜHN: *Medicorum Graecorum Opera quae extant*, (Leipsic, 1827), vol. XIII, pag 415.

⁽³⁹⁾ The prefix *ζυγο* comes from *ζυγός* = « team ».

likewise, the group «tm» can be found in the common Italian and Spanish words «ritmo» and «aritmética»⁽⁴⁰⁾.

It is also to be noticed that the conventional names proposed by us are, owing to their sounds, very near respectively to «gram», «gramme», «Gramm» «grammo», «grammo» already in use in English, French, German, Italian, Spanish, which would undoubtedly make easier the establishment of the new name; and it is also to be noticed that in all the languages they could easily be fused with all the prefixes («kilostathm», «millistathm», etc.) indicating decimal multiples and submultiples.

The abbreviation to use for the proposed names could, then, be fixed in «st» for all languages, as «s» alone cannot be used because it would be against the usual abbreviation rule and because already used with the meaning of «second», the unit of time.

Against the proposal of giving the name of «stathm» to the fundamental unit of mass, it could be objected: that, contrary to what happens to the other fundamental mechanical units, the «stathm» would have an abbreviation consisting of two letters instead of one; that the name would have different orthography and pronunciation in the different languages (this, however, already happens to «metro», «meter», «mètre»,..., «grammo», «gramme», «Gramm»...); and that, at last, the abbreviation «st» has also been, proposed for «stère», the unit of volume to be used in the marketing of timber.

Speaking freely, I do not think that any of these objections is serious enough to invalidate the proposal.

15. – If then we want to derive from the Greek, but in another way, the name to give to the fundamental unit of mass, it may be convenient to consider the names that the Greeks gave to the various units of weight. Here are the principal ones: *τάλαντον*, *στατήρ*, *μνᾶ*, *δραχμή*, *ὀβολός*, *χαλκοῦς*...⁽⁴¹⁾. Now, it seems to me that, evidently for one reason or another, none of these words is suitable to our purposes; neither are suitable to them the submultiples of the mentioned units: *ἡμιστάτηρον*, *τρίτον*, *τέταρτον*,..., *ἡμιμναῖον*, *τριτημόριον*...⁽⁴²⁾.

On the contrary, among the names of the multiples, one must take into

⁽⁴⁰⁾ Which, however, are usually pronounced by assimilating the dental to the nasal.

⁽⁴¹⁾ A. SEGRÈ: *ibid.*, page 122, and F. HULTSCH: *Griechische und Römische Metrologie*, 2nd edit., page 134 and following.

⁽⁴²⁾ A. SEGRÈ: *ibid.*, page 128, 124.

⁽⁴³⁾ R. SCHILLBACH: *De ponderibus aliquot antiquis* in *Annali dell'Istituto di corrispondenza archeologica*, vol. XXXVII, year 1865, pag. 179; the figures which illustrate this famous work are in part in the tables L, M, of the same *Annali* of 1865 and in part in *Monumenti pubblicati dall'Istituto di corrispondenza archeologica*, vol. VIII,

consideration: $\delta\acute{\iota}\mu\nu\sigma\nu$ ⁽⁴³⁾ equivalent to $\delta\delta\omicron \mu\acute{\iota}\nu\alpha\acute{\iota}$, that is «two mines», which could be used for the derivation of the conventional name, «dimno» for instance, to be given to the unit M^* (also because they indicate a weight of about 1400 grams, roughly that of the unit M^*). But the initial letter «d» which would fit to it, rejects this solution as it coincides with the one already used for «day», unit of time.

* * *

16. – The studies carried out in the field of the Greek language can be repeated in the Latin language.

Here, first of all, the name «grave» must be remembered, which was already proposed, as we said above, by the Academy of Sciences in Paris to indicate exactly the mass of a cubic decimeter of distilled water, that is M^* . Surely it would be really very nice to bring again to light this so well suited word; but we have already seen the reasons which oppose it.

Another Latin word meaning «weight», «mass», «quantity of matter», is «pondus» which properly means «weight» placed on the balances as a weighed body and as a balance weight. The form «pondo» corresponds to our sentence «of the weight of...» (for instance: «corona libra pondo» = «a crown of a pound weight»), and it is was used adverbially in calculations (e.g. «auri quinque pondo» = «five golden pounds»). The same word «pondus» was used also to indicate, by antonomasia, the traditional Roman unit of weight, i.e. the «pound»: «talentum ne minus pondo octoginta romanis ponderibus pendat», that is: «do not let the talent weigh less than eighty Roman weights» (= «Roman pounds»), writes LIVIUS ⁽⁴⁴⁾.

It must, however, be also noted that the word «pondus» in many cases means «effort» rather than «weight» in the sense of «quantity of matter». Anyway, it is sure that this word is peculiar to the practice of weighing, that is, the art of measuring by balances or by Roman balance; therefore, the same word «pondus» or the conventional word «pond» could be well chosen to indicate the unit M^* and could be abbreviated by «p».

To this proposal two circumstances can be particularly opposed: one, that to Anglo-Saxon people the word «pond» might cause confusion with the word «pound», which, on the other hand, has the same origin and is already a unit of weight in the British system; the other that, in conformity with the meaning

table XIV, where the figures 68, 69 (the latter is here represented on the annexed Table, fig. a) refer indeed to the weight which interests us here. Still with respect to $\delta\acute{\iota}\mu\nu\sigma\nu$, see also F. HULTSCH: *Griechische und Römische Metrologie*, 2nd edit., page 142; E. PERNICE: *Griechische Gewichte* (Berlin, 1894), page 55, 165-166.

⁽⁴⁴⁾ *Historiae*, book I, chapt. 38.

of « effort », the word « pondus » has already been proposed to form the name of « kilopond » to be given to the « kilogramme-weight » ⁽⁴⁵⁾.

17. – It is therefore convenient to try to find another solution looking for it in the field of Latin words used to indicate the units of weight. At first we must remember the words « libra, ae » and « as, assis ». The former indicated generically « an object which serves to weigh », therefore the « balances » and, for metonymy, « the weighed thing », and then a unit of weight, particularly the basis unit to which we can refer all weighings. The latter originally meant « the whole », « the all » (in fact « quidquid unum est... assem ratiocinatores vocant » ⁽⁴⁶⁾), that is « what is whole is called “ as », by accountants ») and then « the unity »; and, in the practice of weighing, as a unit, it was identified with the « libra » and one said « as libralis ».

Now, while the word « libra », owing to its large circulation and to the abbreviation one should use for it (already used for « litre »), is not suitable to our purpose, that is, to be used as or to suggest another conventional word to indicate the fundamental unit M*; the latter could receive, as a conventional term, the word « as », which should be written always in full, as it could not be abbreviated in « a », because this abbreviation is already internationally used for « year », unit of time.

The only serious objection to this proposal is that in English there is already the word « as » very often used: the Anglo-Saxons physicists should be asked what they think about the inconveniences which this combination might cause.

Besides the words « as » and « libra », in our problem also the names of the other unit of weight used by the Romans must be studied. At first we remember the multiples of the « libra » which were called: « dupondius », « tressis », « nonussis », « decussis », « tricessis », ..., « centussis », ..., « centumpondium »... ⁽⁴⁷⁾. Obviously, none of these words is apt to our purposes.

Let us consider the submultiples. As it is known the Romans used a system of fractionating of unity (of the « as » as « a whole ») which was chiefly duodecimal, as in it there recur only, but not methodically, the divisors 2, 3, 4. There were, therefore, for the « as libralis », the following submultiple units which were called by names not referring to numerical ratios, in their linguistic

⁽⁴⁵⁾ Zur Frage der Einführung der Meßeinheiten Kilopond und Joule (without the Author's name) in *Zeitschrift des Vereines Deutscher Ingenieure*, vol. 92 (1950), page 161. On the subject see also E. PERUCCA: *Sulla questione dell'unità « kilopondo » e « joule »*, in *Supplemento al Nuovo Cimento*, 1950, page 67.

⁽⁴⁶⁾ In this way the land-surveyor BALBUS (who lived in the reign of Trajanus) begins his *Expositio et ratio mensurarum*, on which see F. HULTSCH: *Metrologicorum Scriptorum Reliquiae*, vol. II, page 14-16 and 72.

⁽⁴⁷⁾ A. SEGRÈ: *ibid.*, page 135.

formations: « uncia » = $1/12$ « libra », « sicilius » = $1/4$ « uncia »ⁱ, « drachma » = $1/12$ « sicilius », « scripulum » = $1/3$ « drachma », « obolus » = $1/2$ « scripulum », « lupinus » = $1/2$ « obolus », « siliqua » = $2/3$ « obolus » (48).

None of these names is apt to our purposes.

Other submultiples, intermediate to the preceding ones, were given, on the contrary, names containing in their formation elements clearly arithmetical, which, except for one case with which we shall deal later, indicate so obviously the connection of these submultiples with the unit they refer to, that they too cannot be useful to our purpose (« deunx » = « [libra] dempta uncia » = « undecim unciae », « septunx » = « septem unciae », « semuncia » = « semiuncia », ..., « dodrans » = $3/4$ « uncia », « quadrans » = $1/4$ « uncia »... (49)).

The only submultiple which in its name does not reveal immediately its arithmetical origin is the « bes », which, meaning « binae partes assis », that is « two of the three parts of the whole », was equivalent to $2/3$ of the « as », that is, to eight ounces (50). In the ancient *Carmen de ponderibus*, above mentioned, one can read:

Nun dicam solidae quae sit divisio librae
sive assis...:
cum triens desit, bessem dixere priores » (51),

that is: « Now I am going to say which is the division of the solid “libra”, that is, of the “as”, ...: when one third is missing, the ancients called “bes”, [what is left] ».

Like the other submultiple units having arithmetical names (« dodrans » « triens »...) and, in some cases, the same units with names having no arithmetical derivation (« uncia », « sicilius »...), the « bes » meant only the numerical ratio with the « as », that is with the « whole » to divide: in fact, the words « bes », « dodrans », « triens », and also « uncia », « sicilius » etc. were used to indicate the fractions $2/3$, $9/12$, $4/12$, $1/12$, $1/48$ of the units of length, volume, money (52), while the *quality* of the « as », which was subdivided, was fixed by the text of the speech or by the metrical operation which was executed (53). The « bes », however, referred perhaps chiefly to the case of measures of weight, and therefore it can be considered suitable to our purposes.

(48) F. HULTSCH; *Griechische und Römische Metrologie*, 2nd edit., page 706, table XIII; A. SEGRÈ: *ibid.*, page 135.

(49) See preceding note.

(50) See preceding note.

(51) F. HULTSCH: *Metrologicorum Scriptorum Reliquiae*, etc., vol. II, page 90, verse 41-50.

(52) F. HULTSCH: *Griechische und Römische Metrologie*, 2nd edit., page 75; A. SEGRÈ: *ibid.*, page 141.

(53) A. SEGRÈ, (*ibid.*, page 135) refers the « bes » to the « uncia » considered as « as ».

Ultimately, it would be feasible to give the conventional name of « bes », to the unit M^* , a name which can be written in the same way in English, German, Italian, Spanish, and with a grave accent in French, « bès », to avoid the mute *e* in compound nouns.

Against the proposal to call the unit M^* « bes », I do not think there are serious objections. One could observe that the orthography of the name would not be the same in all languages: but this, as we have already noted, happens also, and to larger extent, to other units in use (gramme, grammo, gram... metro, Meter, mètre...) and it is not inconvenient.

Likewise, it is no inconvenience that the word « bes » originally means arithmetically a particular submultiple of the unit, because the word is so far, both phonetically and orthographically, from the one which it derives from, that only a Latin scholar could find out its original meaning.

And, after all, also the coincidence that the name « bes » is the same as that of the ancient secondary Egyptian divinity Bēs (more precisely Bēseš, in Greek *Βήσας*), a good genius represented as a clumsy, deformed dwarf, cannot be a drawback, as that deity is known only, I think, to specialists of the history of ancient Egyptian religion.

On the other hand the advantage which the name « bes » would offer are many: « bes » is a short, quick word with an easy spelling and pronunciation in all modern languages, either neo-Latin or Anglo-Saxon or Slav; it can be easily joined to all prefixes (millibès, kilobes, megabes...), and it can be abbreviated with the small letter « b » which has not yet any peculiar meaning in Metrology.

18. — One more consideration.

Until now all our proposals have had a literary origin, that is, they have been suggested by Greek or Latin words referring to physical properties of matter or to the art of weighing or to the names used to indicate particular weights.

But a different way could be tried.

It is well-known that the weights which in practice were used by the Greeks and the Romans were objects of different shape and material, generally marked (by symbols, letters, signs,...) in such a way that they might indicate in each case the value relative to the unit assumed as « fundamental » (as we say to day) ⁽⁵⁴⁾.

⁽⁵⁴⁾ The real weight of the objects which constituted the ancient Greek and Roman weights found in the excavations, is so different even for the pieces bearing the same name, that the exact reconstruction of the unit is extremely difficult and doubtful. The differences also come from the real initial difference of weight that homonymous units had in different places, from the faults in construction, from the usury, from the chemical alterations, and from the damages suffered from the weather.

Now leaving out particular cases and referring especially to the Greek weights ⁽⁵⁵⁾, we see that they were generally leaden pieces shaped as quoits, mostly squared, with edges mill-hopper bent. These quoits were of various sizes and thicknesses and, on one side, they bore, generally embossed, words, letters, monograms, conventional marks, figures of various objects, sometimes an indication of the place of origin or use, the maker's name etc.; while the side and the edge were smooth and generally without any indication.

The objects that occurred most frequently in the figures were: the amphora (ἀμφορεύς), the tortoise (χελώνη), the dolphin (δελφίς), the astragalous (ἀστράγαλος), the shield (ἀσπίς, πέλτη), the screech-owl (γλαύξ), the woman-breasts (μαστός), the horned moon, and the ox head... Sometimes the objects were represented only in part: half a dolphin, a quarter of an amphora, half a tortoise... It seems that the figures served to indicate the weighing system to which the weight referred ⁽⁵⁶⁾. On the next page drawings some of these weights are reproduced ⁽⁵⁷⁾.

In the description of these ancient and significant monuments, given by the archaeologists, I found the question whether the name of the represented object (a dolphin) might be used to indicate the corresponding weight ⁽⁵⁸⁾.

This question (which seems to have a negative answer ⁽⁵⁹⁾) has led me to study whether the solution of the problem which interests us could be obtained by considering the Greek names of the objects represented on the ancient weights and by deriving a name for M* from one of these; but unluckily, for one reason or another, I do not think that this derivation may offer us the looked for solution.

* * *

19. — Summing up these considerations I can conclude that, *perhaps, it is not a rash proposal to consider the opportunity of assuming, as the name of the fundamental unit of mass, one of the three words: «brize» or «stathm» or «bes», and their respective abbreviations «b», «st» and «b».*

If I were asked which of these three hypothetical solutions should be preferred, I should reply that, if one were to give importance to the philosophical value of the word, I should choose the name of «stathm», because of

⁽⁵⁵⁾ For news, descriptions and figures of ancient Greek weights, see the works of SCHILLBACH and of PERNICE already mentioned in the note ⁽⁴³⁾.

⁽⁵⁶⁾ R. SCHILLBACH: *De ponderibus* etc., page 169-170.

⁽⁵⁷⁾ I should like to thank Mrs. M. SCHELLEMBRID BUONANNO, Director of the Biblioteca Braidense, for having placed at my disposal the tables which accompany the above mentioned works of SCHILLBACH.

⁽⁵⁸⁾ R. SCHILLBACH: *De ponderibus* etc., page 172.

⁽⁵⁹⁾ E. PERNICE: *ibidem*, page 17.

its meaning, deep and intrinsic to the art of weighing; if, on the contrary one would accept to sacrifice partly this value, and one should prefer a simpler word, with a more uniform spelling in the different languages, with an easier pronunciation and with a simpler abbreviation (*and these are very important requisites*), then I should choose the name « bes ».

* * *

In finishing this paper I feel it is my pleasant duty to thank very much Professors A. CALDERINI, E. CUZZI, G. FUNAIOLI, G. PIGATO, G. B. PIGHI for the exchange of opinions that I have had with them on the subject, as well as Miss C. S. PINTO for her translation.

L'influenza dell'inglese sul vocabolario della fisica in Italia (*).

G. TORALDO DI FRANZIA

Istituto di Fisica dell'Università - Firenze

(ricevuto il 27 Luglio 1951)

« La geometria dell'unità non è convenzionale, ma è disegnata in modo che la sezione effettiva della targhetta provi di essere diversa da quella attuale e sia capace di essere controllata, come le altre quantità rilevanti, operando l'equipaggiamento a corrente diretta ».

Astrattismo? Metapsichica? Enigmistica? No: fisica.

Forse abbiamo un po' esagerato. Eppure, se tanto mi dà tanto, non tarderemo molto a leggere simili discorsi nelle nostre pubblicazioni di fisica, o a udirli nei nostri congressi.

Non può destare meraviglia che quella parte, oggi così vasta e importante, della letteratura scientifica, che viene pubblicata in inglese, eserciti una potente influenza, anche linguistica, in tutti i paesi. In particolare, il vocabolario dei fisici italiani ne ha risentito molteplici effetti.

Di questo fatto ci sem'bra dover distinguere nettamente due aspetti diversi; l'uno, diremmo così, sanamente fisiologico e pieno di giustificazioni, l'altro per lo meno ridicolo e di cattivo gusto.

È naturale e giustificato che tutto il mondo accetti nuovi termini tecnici, relativi a una data disciplina, da quel paese che in una determinata epoca storica dà un impulso più notevole, più originale, o anche solo quantitativamente più potente, alla disciplina stessa. E se tutto il mondo accetta *andante*, *allegro moderato*, *pianissimo* e innumerevoli altri termini della musica dall'italiano, *soufflé*, *purée*, *vol-au-vent* e tanti altri termini culinari dal francese, possiamo tranquillamente accettare *spin*, *shunt*, *radar* e simili dall'inglese.

(*) Questo vocabolarietto è stato pubblicato recentemente sugli *Atti della Fondazione G. Ronchi*. La Redazione di quel periodico ha gentilmente acconsentito alla riproduzione di esso sul *Nuovo Cimento*, nella presente forma ampliata e arricchita di nuove voci.

Ma quello che non ci sembra tollerabile è l'uso di parole italiane, alle quali, per scimmiettare l'inglese, vengono attribuiti significati che non hanno; e ciò quando altre parole italiane, che posseggono proprio quei significati, ci sono e sono sempre state nell'uso.

A volte poi si tratta di veri e propri errori di traduzione; più che un bistrattamento della lingua italiana è allora pigrizia nell'uso del dizionario. Ma questi errori prendono poi pianta stabile nella letteratura scientifica e sono fonte di non poche confusioni.

Infine, esistono delle parole inglesi che hanno l'esatto corrispondente italiano e per le quali non si vede proprio la necessità, nè la giustificazione storica dell'uso invalso di accettarle tali e quali negli scritti italiani.

Abbiamo creduto non del tutto inutile richiamare l'attenzione su alcuni almeno dei vocaboli inglesi che meritano di essere conosciuti dai fisici nel loro esatto significato. Non vogliamo con questo apparire cruscanti barbogi, nè far professione di nostalgico nazionalismo. Vogliamo solo spezzare una lancia in favore del buon gusto e della chiarezza.

ability - Non è *abilità*, per la quale gli inglesi usano *skill*, ma *capacità*.

accuracy - Quasi sempre negli scritti di fisica significa *precisione* e non *accuratezza*. Non è la stessa cosa. Che per raggiungere un elevato grado di *precisione* in una misura, sia necessario farla con *accuratezza* è vero; ma l'*accuratezza* va riconosciuta all'operatore e non al risultato numerico della misura!

actual - Non vuol dire *attuale*, ma *effettivo*.... che non si dice *effective*! (v. *effective*). *Attuale* si traduce con *present*. È un bel bisticcio, ma è bene conoscerlo.

argument - Normalmente va tradotto con *ragionamento*. Non che in italiano non si possa dire *argomento*, con lo stesso significato. Basta per esempio pensare al dantesco « velen dell'argomento ». Ma questa accezione suona un po' arcaica e sarebbe ridicolo rinverdirla per virtù dell'inglese.

assume, assumption - Se tutte le volte che i fisici italiani dicono di fare una *assunzione*, si trattasse di un'assunzione vera e propria, ci sarebbe da sperare di risolvere in poco tempo il problema della disoccupazione. In realtà non si tratta

purtroppo, di assunzioni, ma di semplici *ammissioni*, *supposizioni*, *ipotesi*. Come si vede l'italiano abbonda di vocaboli adatti a tradurre *assumption* nelle sue varie sfumature.

attitude - Non è un vocabolo appartenente specificamente alla letteratura scientifica ed è più frequente trovarlo nei giornali, tradotto come *attitudine*. Ma capita anche qualche volta di leggere che l'*attitudine* da prendere dinanzi a un problema è, ecc. O non sarebbe meglio dire l'*atteggiamento*? Ci sembra piuttosto che *attitudine* sia sinonimo di *capacità*, o *inclinazione*.

basic - Una *basic theory* non è una *teoria basilare* (altrimenti si dovrebbe ammettere che esistessero anche le *teorie acide*). E non è nemmeno con esattezza una *teoria basilare*. È piuttosto una *teoria di principio*. Tutto ciò che è *basic* riguarda di solito i principi o i fondamenti.

bremsstrahlung - O che cosa c'entra l'inglese?, si chiederà. Eppure ci sembra di poter dire che c'entra proprio l'inglese. Fatto sta che non è facile tradurre correttamente in buon inglese questa parola tedesca. Per questo nei

lavori americani ed inglesi essa è stata accettata tale e quale. E gl'italiani hanno pensato: se lo fanno loro....

Ma in italiano l'espressione *radiazione di frenamento* è ottima ed è l'esatta traduzione.

cancel - Carini quei termini di un'equazione che si cancellano da sè. Pare di vederli, armati di gomma, intenti a strofinare la pagina! Ma in italiano i termini non si *cancellano*, si *eliminano*.

capable - Spesso vuol dire *suscettibile* anziché *capace*.

capacitor, inductor, resistor - Ecco un caso in cui ci sentiamo di plaudire all'adozione dei neologismi stranieri. Un *capacitore*, un *induttore* e un *resistore* sono qualche cosa di diverso da una *capacità*, da un' *induttanza* e da una *resistenza*. Questo, naturalmente non vuol dire che, una volta capita e insegnata la distinzione, non si possa anche trascurarla nel parlar comune. Allo stesso modo, infatti, conviene bensì insegnare agli studenti che un *grave* non è un *peso*, ma non sarà poi scandaloso dire di mettere dei pesi su una bilancia.

confront - Non vuol dire *confrontare*, ma, se mai, *affrontare*. *We are confronted with this problem* vale *ci troviamo dinanzi a questo problema*.

connection - Si è visto anche questo: In questa *connessione* si consulti ecc. Ma davvero si può credere che questo sia italiano? Davvero è tanto difficile intuire che la traduzione esatta è: *In relazione a ciò*, oppure *su questo argomento*, ecc.?

consistent, inconsistent - Ecco un'altra piaga che affligge la letteratura scientifica. *Consistent* non vuol dire *consistente*, bensì *coerente*, *compatibile*, *in accordo*. Si pensi che vi possono essere teorie, di per sè *consistent*, cioè *coerenti* pur essendo *inconsistenti*; mentre altre teorie, che pur avrebbero una certa consistenza, sono *inconsistent* con i dati sperimentali!

Quanto a *self-consistent*, perchè non dire *autocompatibile*?

control - I giornali e la radio ci hanno talmente abituati alle scorrette traduzioni, come: *le truppe controllano un territorio*, ecc., che più non pensiamo all'esatto significato di controllare, che è *verificare*. *To control* per i fisici dovrebbe essere tradotto quasi sempre con *comandare* (per esempio, un meccanismo, un dispositivo).

conventional - Parlando da un punto di vista filosofico è vero che molta parte della scienza è forse anche la scienza tutta non è che convenzione. Eppure giureremmo che molti fisici italiani, quando parlano di teorie, di procedimenti o di apparecchiature *convenzionali*, sono ben lontani dal riferirsi a speculazioni così elevate e così critiche! Purtroppo essi ignorano semplicemente che *conventional* vuol dire *usuale*, *ordinario*, *generalmente accettato*, *tradizionale*. O, peggio ancora, pur non ignorando l'esatto significato, fingono di credere che in italiano tale significato si possa rendere con *convenzionale*.

cross section - Alla lettera sarebbe *sezione trasversale*. In fondo il problema, che spesso ci si pone sul come tradurre questa espressione, è piuttosto inconsistente. Infatti esso nasce soltanto perchè si vuole aggiungere alla parola *sezione* una specificazione, che non è contenuta nella parola inglese. D'accordo che *cross section* si adopera nella fisica moderna per *sezione equivalente* o *efficace*. Ma ci sembra che si possa quasi sempre, senza timore di confusione, risparmiare l'aggettivo, proprio come fanno gli anglosassoni; come essi dicono *geometric cross section*, *scattering cross section*, ecc., noi potremmo dire *sezione geometrica*, *sezione di scattering*, *sezione di urto elastico* o *anelastico*, *sezione di assorbimento*, *sezione per una data reazione*, ecc.

Quanto all'impiegare *sezione di urto*, per qualsiasi tipo di *cross section*, ci sembra poco preciso.

definitely - Non vuol dire nè *definitivamente*, nè *definitamente*, ma *decisamente*, senza dubbio.

derive - *Derivare un'equazione* da noi significa (con locuzione alquanto ellittica) effettuare la derivata di ambo i membri. In inglese invece *to derive an equation* significa *dedurre* un'equazione.

design - È comprensibile che chi conosce poco l'inglese creda che *to design* un apparecchio voglia dire *disegnare* l'apparecchio stesso. Ma come si fa a credere che si *disegni* un'esperienza? *To design* vuol dire *progettare*.

direct current - Speriamo proprio che nessun fisico traduca con *corrente diretta* anziché con *corrente continua*. Ma « *melius abundare...* ».

effective - Questo è uno dei vocaboli più pericolosi nella fisica e nella tecnica. Già, perchè a tradurlo con *effettivo*, come tanto spesso si fa, si dice esattamente il contrario di quello che si dovrebbe. *Effective* vuol dire *efficace* o *equivalente* e si riferisce a una grandezza che è diversa da quella *effettiva*, pur sostituendosi vantaggiosamente ad essa, per quanto riguarda gli effetti (si pensi alla corrente efficace, alla lunghezza d'onda efficace, ecc.). Forse qualcuno osserverà che l'accezione inglese della parola è più logica e più aderente all'etimologia, di quanto non sia l'italiana. Può anche darsi, ma che fare se l'italiano è così?

Notiamo poi che *effective* può significare *efficace* anche nel senso meno tecnico, di *molto adatto a produrre gli effetti desiderati*.

equipment - Fare un'esperienza fisica è cosa diversa dall'intraprendere una spedizione polare. Per questo è bene tradurre *equipment* non con *equipaggiamento*, ma con *apparecchiatura*, *attrezzatura* o, semplice niente con *apparecchio*, a seconda dei casi.

error - Gli errori degli strumenti ottici in italiano sono *aberrazioni*. Se mai possono essere errori di chi li ha calcolati; ma non è giusto che gli errori dei padri vengano imputati ai figli.

eventually - Curiosa quella catena radioattiva che, *eventualmente*, conduce al

Piombo. E negli altri casi a che cosa conduce? *Eventually* vuol dire *alla fine*.

evidence - Questo vocabolo, quando si presenta in unione con l'aggettivo *experimental* (che, del resto, può essere anche sottinteso) è di traduzione difficilissima. Gli anglosassoni dicono che vi è, o non vi è, *experimental evidence*, per esempio a favore di una data teoria, quando le ricerche sperimentali note forniscono, o non forniscono, elementi sufficienti a corroborare la detta teoria. Ed è per questo che in molti casi consiglieremmo di tradurre: *vi sono, o non vi sono, elementi sperimentali in questo senso*. Ma non c'illudiamo che questo vada bene in tutti i casi. Qualche volta bisognerà ricorrere a delle perifrasi. Ma, per pietà, non si traduca *evidenza sperimentale*, che, anche se fosse locuzione accettabile in italiano, vorrebbe dire un'altra cosa, cioè prova schiacciante e inconfutabile.

expand, expansion - Negli scritti scientifici valgono *sviluppare* e *sviluppo*. Per carità non si parli di *espansioni in serie!*

geometry - A molti sembra elegante imitare gli anglosassoni nelle locuzioni: *la geometria dell'apparecchio* e simili. A noi sembra molto più elegante dire in buon italiano la *configurazione geometrica* dell'apparecchio. Quanto alla *geometria* degli apparecchi, vogliamo sperare che sia sempre la stessa: quella euclidea.

govern - Che mania questa politica! Perfino le equazioni vogliono governare!

In realtà, quando gli anglosassoni dicono che un fenomeno è *governed* da certe equazioni, vogliono soltanto significare che il fenomeno è *regolato* da quelle equazioni.

inspection - Negli scritti scientifici non è mai *ispezione*, ma piuttosto *esame*. *By inspection* vuol dire *a vista, senza difficoltà*.

investigate, investigation - Anche ai *detectives* vogliono far concorrenza i fisici! E, del resto, non si può disconoscere che i misteri della natura siano anche

più intricati di quelli dei romanzi gialli. Tuttavia dobbiamo dare una delusione a quei fisici che già si sentono Sherlock Holmes. *Investigation* vuol dire soltanto *ricerca, esame, studio*.

involve - È un vocabolo di cui può tornar difficile rendere bene le sfumature. È piuttosto *coinvolgere* o *implicare* che *involgere*. A seconda dei casi dovrà tradursi con *comportare, interessare, far comparire* e simili. Quando poi un problema è *involved*, non è *involuta*, ma *complicato*.

lattice - Sì, sembra impossibile; eppure si è sentito anche parlare di profondi studi sui *lattice* spaziali. E quale mai specie del regno vegetale stillerà un *lattice cristallino*? Sembrerebbe proprio opportuno evitare queste buffonate e imparare che *lattice* va tradotto con *reticolò* o *reticolato*.

moment, momentum - Un bel pasticcio questo delle due parole inglesi (veramente una inglese e l'altra latina) che vengono tradotte in italiano con la stessa parola: *momento*. *Moment* vuol dire *momento* e *momentum* vuol dire *quantità di moto*.

È certo che *quantità di moto* è già un'espressione lunga e *momento della quantità di moto* ⁽²⁾ addirittura lunghissima e barocca, inadatta per designare una grandezza fisica così fondamentale e di uso così corrente. Ma è anche certo che tradurre *angular momentum* con *momento angolare* è, per lo meno, ambiguo. Perché il momento di una forza non dovrebbe essere un momento angolare?

Si sa, l'espressione *momento angolare* si può giustificare col fatto che il momento della quantità di moto è il *momento coniugato* (in senso lagrangiano) a una coordinata angolare. Ma anche i momenti coniugati non si dovrebbero chiamare *momenti*.

⁽²⁾ Che, naturalmente, in inglese può anche chiamarsi *moment of momentum* (Cfr. E. A. MILNE: *Vectorial Mechanics*, Londra, 1948, pag. 211).

È difficile trovare una soluzione del tutto soddisfacente allo spinoso problema. Ma si potrebbe adottare un ripiego. Spessissimo nella fisica moderna per dire *quantità di moto* si dice *impulso*. Certamente anche questo non è esatto, perché la quantità di moto non è l'impulso, come l'energia non è il lavoro. Ma forse è il minor male. Si potrebbe allora parlare di *impulso angolare* e a noi sembra che questa espressione renda molto bene il concetto fisico.

net - *Net result* non vuol dire *risultato netto*, ma *risultato finale* o *complessivo*.

neutral - A quanto sembra, anche le particelle possono essere neutrali. Ci pare un pacifismo un po' esagerato e vogliamo sperare che si tratti soltanto di particelle *neutre*.

operate, operation - Quella di *operare* un dispositivo o un meccanismo è una ben strana chirurgia, della quale si sente parlare non di rado. Ma *to operate* vuol dire invece *azionare, mettere in opera*. E *operation* vuol dire *funzionamento*.

pi - In inglese questa parola, pronunciata con il suono lungo della *i* (che non è esattamente *ai* italiano) vuol dire *pi greco*, cioè è il nome della lettera π . Qualcuno, forse per far vedere che sa l'inglese, ha lanciato il vizzo di chiamare *mesone pai* il mesone π . Sorvoliamo sul fatto che con ciò si dimostra di non saper l'inglese, perché, come già rilevato, *i* inglese non è uguale a *ai* italiano. Ma non possiamo sorvolare sul cattivo gusto di storpiare all'inglese una lettera greca!

Chi non ricorda che a scuola c'insegnavano: Il volume della sfera qual'è? Quattro terzi *pi* greco erre tre. Vogliamo proprio che i nostri figli apprendano: Quattro terzi *pai* erre tre?

Qualcuno, più riverente verso l'antichità greca, ma timoroso di sprecare troppo fiato, dice *mesone pi*. E anche questo è errato (almeno fino a quando non si scoprirà il mesone *p*).

Per fortuna la soluzione che può contentare tutti è già pronta. Basta

chiamare *pione* il mesone π e *muone* il mesone μ (cfr. E. FERMI: *Nuclear Physics*, Chicago, 1950, pag. 131).

position - L'espressione *to be in a position*, che s'incontra spesso nella letteratura scientifica, non significa *essere in una posizione*, ma *essere in grado*.

procedure - Se anche i fisici cominciano ad occuparsi sul serio di *procedura*, i giuristi protesteranno per l'illecita concorrenza. È bene pertanto che i fisici tengano presente che *procedura* si traduce con *procedimento*.

prove - *Proves to be* vuol dire *risulta*. Il *to be* può anche essere sottinteso.

quantity - Non è sempre *quantità* (per la quale si usa piuttosto *amount*). A *physical quantity* va tradotto come *una grandezza fisica*.

range - Ci sembra che non vi sia proprio bisogno di adoprare la parola inglese. *Percorso* va benissimo. E dire *percorso residuo* è forse una pignoleria inutile.

relevant - Una *relevant quantity* può essere anche una quantità tutt'altro che *rilevante*; ma come tradurre? L'italiano *relativo* va già meglio, ma non è l'esatta traduzione. Forse ci si può spiegare con un esempio. Le *relevant quantities* sono le grandezze fisiche che interessano o che si riferiscono al problema studiato.

scatter, scattering - «Hic sunt leones». È un vero problema tradurre bene questi vocaboli, di impiego così frequente nella fisica moderna (che forse potrebbe chiamarsi la fisica dello *scattering*).

È vero che si può adottare la traduzione letterale (o quasi) di *sparpagliare* come fanno alcuni autorevoli maestri (cfr. per es. E. AMALDI e G. WICH: *La fisica nel neutrone*, Milano, 1948). Tuttavia oseremmo dire che in *to scatter* v'è qualcosa di molto più dinamico, più preciso, più tecnico che nel mite *sparpagliare*. E poi una *scattered particle*, potrà essere una *particella sparpagliata*?

Anche *diffondere* potrà essere in certi casi (per es. per la luce) una traduzione

accettabile. Ma in molti altri casi non va decisamente.

Non osiamo pronunciarsi in modo assoluto su questo difficile problema. Tuttavia ci sembra che si potrebbe anche accettare *scattering* come parola internazionale, insostituibile, analogamente a quanto è avvenuto per *spin*.

Quanto a *scatterare*, ci lascia molto perplessi e un po' disgustati. Ma come farne a meno?

Volendo tradurre in italiano, a noi non spiacerebbe *diffrangere*.

self-energy - Quanto diciamo per questo vocabolo, valga per tutti quelli composti con un *self* iniziale. Ci sembra proprio che il *self* inglese corrisponda in tutto e per tutto all'*αὐτός* greco. E allora perchè non dire *autoenergia*? Che poi anche la *self-energy* sia un'espressione infelice per esprimere il concetto fisico che vorrebbe, è questione che non ci riguarda in sede linguistica. Si dica pure *energia intrinseca* se si vuole; ma in ogni caso non v'è ragione di usare il vocabolo inglese.

situation - È molto buffo leggere in uno scritto scientifico l'espressione enfatica: *in questa situazione*. Quando si trova *in this situation*, si traduca semplicemente *dato questo*, o *ciò premesso*, o *stando così le cose*, ecc.

strict, strictly - Sarebbe molto strano se, per parlare con esattezza, si dovesse parlare *strettamente*. Ma *strictly speaking* vale a rigore.

supervision - Ma davvero esiste in italiano la parola *supervisione*? Si traduca, a seconda dei casi, con *sorveglianza*, *controllo*, *guida*, ecc.

target - Ecco uno dei casi più divertenti di traduzioni sbagliate. *Target* vuol dire *bersaglio*. Ora avviene che nei bombardamenti nucleari il bersaglio è spesso costituito da una lastrina del materiale da cimentare. E, naturalmente, si è tradotto *targhetta*. Quando poi si fa notare l'errore, ci si sente dire che, in fondo, si tratta proprio di una *targhetta*.

Ma, anche dato, e non concesso, che i bersagli nella fisica nucleare debbano avere tutti quella forma, sta il fatto che *targa* e *targhetta* si adoperano in italiano quando la funzione delle medesime sia quella di portare una scritta. Quindi, se mai, per i bersagli della fisica atomica, si dovrebbe dire *lastrina*, *piastrina* *lamina* o simili.

Ma non sarebbe meglio confessare che si è incorsi in errore e tradurre *target* con *bersaglio*?

term - *In terms of* vuol dire *in funzione di*.

trivial - Uno che, non prevenuto, si mettesse a scorrere la letteratura scientifica italiana, potrebbe rimanere non poco meravigliato al vedere che anche nella scienza si trovano cose triviali. Non è il caso di esclamare: «o tempora o mores!». In realtà, nonostante il lamentato decadimento morale del dopoguerra, la trivialità non si è ancora insinuata in larga misura nella ricerca scientifica. Basta soltanto sapere che *trivial* non vuol dire *triviale*, ma *ovvio*, *banale*.

typical - Non vuol dire sempre *tipico*. Qualche volta significa *generico*. È evidente, per esempio, che un *typical point* di un insieme non è un *punto tipico*, ma un *punto generico*.

unit - Quando sta ad indicare un *complesso*, un *apparecchio* o un *apparato* non è facile renderne bene in italiano l'esatta

sfumatura. Ma certo non va tradotto con *unità*! Tornano molto bene a proposito le parole con cui il prof. G. POLVANI ci ha gentilmente segnalato il caso: «Una volta mi è giunto l'estratto di un lavoro intitolato "Nuova unità elettromagnetica per radiofonia", pubblicato in un serissimo giornale italiano. Alla lettura del titolo, credetti alla proposta di una nuova unità elettrotecnica (quasi che non bastassero le centomila in uso). Invece si trattava di un altoparlante elettromagnetico, che, considerato in blocco, era una *unità*. Ora è vero che nel senso di *complesso* la parola *unità* è usata in italiano, con palese barbarismo, nel gergo militare, ma ciò non autorizza ad estendere la bruttura alla scienza di GALILEO».

vital - Una volta esistevano soltanto gli organi *vitali*. Ora molte cose sono *vitali* anche se non hanno niente a che fare con la biologia e con la vita. Ciò è dovuto semplicemente al fatto che molti traduttori (specie giornalisti) ignorano che *vital* vuol dire *essenziale*. Si convincono i fisici che i loro problemi non sono mai *vitali* (a meno che non riguardino la bomba atomica, naturalmente...).

voltage - Quanto è brutto dire *voltage* anziché *tensione*! È piuttosto da garzone di officina che da chi ha la mente scientificamente educata il confondere una grandezza fisica con l'indicazione di un quadrante.

INDICE PER L'ANNO 1951

Atti del XXXVI Congresso della Società Italiana di Fisica tenutosi a Bologna nei giorni 15-20 Settembre 1950	pag. 1
G. MORPURGO - Il problema delle correzioni radiative alla sezione d'urto per scattering di un elettrone in un campo coulombiano e il metodo di Bloch-Nordsieck	» 109
D. GRAFFI - Meccanica, ottica geometrica e propagazione inosferica . . .	» 156
S. ALBERTONI - Osservazioni sull'equazione fondamentale dell'elettrodinamica di Tomonaga-Schwinger	» 168
G. POLVANI - On Giving a distinct Name to the fundamental Unit of Mass	» 180
G. TORALDO DI FRANCIA - L'influenza dell'inglese sul vocabolario della fisica in Italia	» 198

Fine del *Supplemento* al Vol. VIII, Serie IX
del « Nuovo Cimento », 1951

PROPRIETÀ LETTERARIA RISERVATA

